

GEOMETRIE UND KOMBINATORIK VON NASH-GLEICHGEWICHTEN

THORSTEN THEOBALD

Institut für Mathematik, MA 6-2, Technische Universität Berlin,
Straße des 17. Juni 136, D-10623 Berlin
theobald@math.tu-berlin.de

ZUSAMMENFASSUNG. Ein immer noch offenes Grundproblem der Spieltheorie ist die Bestimmung der maximalen Anzahl von Nash-Gleichgewichten in nicht-kooperativen 2- und n -Personen-Spielen. Anhand verschiedener Entwicklungen der letzten Jahre zu dieser Fragestellung geben wir einen Einblick in die vielfältigen geometrischen und kombinatorischen Aspekte von Nash-Gleichgewichten.

1. EINLEITUNG

Spätestens seit dem mit vier Oscars ausgezeichneten Film „A Beautiful Mind“ [1] sind *Nash-Gleichgewichte* erneut auch dem allgemeinen mathematischen Publikum ins Bewusstsein gerückt. Für seine wegweisenden Beiträge zur Spieltheorie aus den 50er Jahren wurde John Nash (gemeinsam mit John Harsanyi und Reinhard Selten) im Jahr 1994 mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet. In der offiziellen Pressemitteilung wurden Nashs Beiträge wie folgt gewürdigt (siehe auch [7]).

„John F. Nash introduced the distinction between cooperative games, in which binding agreements can be made, and non-cooperative games, where binding agreements are not feasible. Nash developed an equilibrium concept for non-cooperative games that later came to be called Nash equilibrium.“

In Zusammenhang mit gegenwärtigen Entwicklungen in der Auktionstheorie sowie bei Gleichgewichtsmodellen im Internet erhält das Grundmodell der Nash-Gleichgewichte aktuell eine hohe Aufmerksamkeit (siehe z.B. den Übersichtsartikel [16]).

Nashs Resultate garantieren die Existenz von Gleichgewichten in sogenannten *Spiele* *in Normalform*. Erstaunlicherweise sind über diese Existenzaussagen hinaus bereits sehr grundlegende Fragen zu diesen Spielen (wie etwa der maximalen Anzahl von Nash-Gleichgewichten im Endlichkeitsfall) immer noch ungeklärt. In dem vorliegenden Artikel soll ausgehend von Nashs Ergebnissen ein Einblick in die reichhaltige Geometrie und Kombinatorik von Nash-Gleichgewichten gegeben werden. Insbesondere soll hierbei auf einige interessante neue Entwicklungen und Ergebnisse der letzten Jahre hinsichtlich der

Ein Teil dieser Arbeit entstand während eines durch ein Feodor-Lynen-Stipendium der Alexander von Humboldt-Stiftung geförderten Aufenthaltes an der Yale University.

maximalen Anzahl von Nash-Gleichgewichten für 2-Personen-Spiele (vor allem von Keiding [6] und von Stengel [21]) sowie n -Personen-Spiele (McKelvey und McLennan [10]) eingegangen werden.

In Abschnitt 2 behandeln wir 2-Personen-Spiele und in Abschnitt 3 allgemeine n -Personen-Spiele.

2. BIMATRIXSPIELE

Wir betrachten zunächst *Normalformspiele* mit zwei Spielern, sogenannte *Bimatrixspiele*. Jeder der beiden Spieler $i \in \{1, 2\}$ besitzt eine nichtleere, endliche Menge *reiner Strategien*. Werden die Anzahlen der Strategien von Spieler 1 bzw. Spieler 2 mit m bzw. n bezeichnet, dann kann das Spiel durch zwei $m \times n$ -Matrizen A und B beschrieben werden, den sogenannten *Auszahlungsmatrizen*.

Wie beim wohlbekannten Spiel „Schere, Stein, Papier“ wählt jeder Spieler eine Strategie, und in Abhängigkeit der gewählten Strategien ergibt sich die Auszahlung für Spieler 1 und für Spieler 2. Die Auszahlungsmatrizen für das Spiel „Schere, Stein, Papier“ sind etwa

$$A = \begin{array}{ccc|c} & \text{(Sch)} & \text{(St)} & \text{(P)} \\ \begin{array}{c} \text{(Sch)} \\ \text{(St)} \\ \text{(P)} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & & \end{array}, \quad B = \begin{array}{ccc|c} & \text{(Sch)} & \text{(St)} & \text{(P)} \\ \begin{array}{c} \text{(Sch)} \\ \text{(St)} \\ \text{(P)} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & & \end{array}.$$

Aufgrund der Eigenschaft $A = -B$ spricht man hierbei von einem *Nullsummenspiel*; solche Spiele sind besonders einfach zu analysieren.

Eine *gemischte Strategie* ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den reinen Strategien. Bezeichnet

$$\Delta_{m-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x \geq 0, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

das $(m-1)$ -dimensionale Simplex der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den m reinen Strategien des ersten Spielers, dann ist ein gemischtes Strategienpaar für die beiden Spieler ein Punkt in der Menge $\Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1}$. Zu gewählten gemischten Strategien $x \in \Delta_{m-1}$, $y \in \Delta_{n-1}$ beträgt die erwartete Auszahlung an den ersten Spieler $x^T A y$ und die erwartete Auszahlung an den zweiten Spieler $x^T B y$. Jeder Spieler möchte seine eigene Auszahlung maximieren, aber diese Auszahlung hängt natürlich auch von der gewählten Strategie des Kontrahenten ab. Ein Paar gemischter Strategien heißt ein Nash-Gleichgewicht, wenn jeder der beiden Spieler lokal zufrieden ist; d.h., wenn keiner der beiden Spieler seine eigene Auszahlung durch Wahl einer anderen Strategie verbessern kann, solange der jeweilige Kontrahent seine Strategie beibehält:

Definition 2.1. Ein Paar gemischter Strategien (\bar{x}, \bar{y}) heißt *Nash-Gleichgewicht*, wenn

$$\bar{x}^T A \bar{y} \geq x^T A \bar{y} \quad \text{und} \quad \bar{x}^T B \bar{y} \geq \bar{x}^T B y$$

für alle gemischten Strategien x, y .

Das Spiel „Schere, Stein, Papier“ hat genau ein Nash-Gleichgewicht: $\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T, \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)^T\right)$.

Beispiel 2.2. Das durch die Auszahlungsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

beschriebene Bimatrixspiel besitzt 3 Nash-Gleichgewichte:

$$\left((1, 0)^T, (0, 1, 0)^T \right), \quad \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T, \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)^T \right), \quad \left(\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right)^T, \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)^T \right).$$

Die Auszahlungen in diesen drei Fällen betragen $(1, 8)$, $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ bzw. $(\frac{7}{2}, 4)$.

Bemerkung 2.3. Analog können n -Personen-Spiele definiert werden, und ein Nash-Gleichgewicht ist ein n -Tupel gemischter Strategien, bei dem jeder Spieler lokal zufrieden ist (siehe Abschnitt 3).

Eine *beste Antwort* von Spieler 1 auf eine gemischte Strategie y von Spieler 2 ist eine gemischte Strategie $x \in \Delta_{m-1}$, die $x^T A y$ maximiert. Ebenso ist eine beste Antwort von Spieler 2 auf eine gemischte Strategie x von Spieler 1 eine gemischte Strategie y , die $x^T B y$ maximiert. Dabei ist eine gemischte Strategie x des ersten Spielers genau dann eine beste Antwort auf eine Strategie y des Opponenten, wenn in x nur solche reinen Strategien mit positiver Wahrscheinlichkeit verwendet werden, die beste reine Antworten auf y sind [14, 15]; denn eine positive Wahrscheinlichkeit für eine gegen y suboptimale reine Strategie würde die erwartete Auszahlung an Spieler 1 verschlechtern. Für ein Nash-Gleichgewicht bedeutet das:

Lemma 2.4. *Ein gemischtes Strategienpaar (\bar{x}, \bar{y}) ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn \bar{x} und \bar{y} beste Antworten auf die Strategie des Opponenten sind, d.h. wenn*

$$\left((A\bar{y})_i < \max_{1 \leq k \leq m} (A\bar{y})_k \implies \bar{x}_i = 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\} \right)$$

und

$$\left((\bar{x}^T B)_j < \max_{1 \leq k \leq n} (\bar{x}^T B)_k \implies \bar{y}_j = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\} \right).$$

Das grundlegende Resultat von Nash aus dem Jahr 1950 [13, 14, 15] besagt nun, dass jedes endliche n -Personen-Spiel *mindestens ein* solches Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzt. Die kürzesten Beweise benutzen den Fixpunktsatz von Kakutani (siehe [13]). Die ebenfalls auf Nash zurückgehende explizitere Version, die in seiner Arbeit in den *Annals* präsentiert wurde [15], benutzt direkt den Brouwerschen Fixpunktsatz und soll zunächst für den Fall von Bimatrixspielen rekapituliert werden.

Satz 2.5. *Jedes Bimatrixspiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht.*

BEWEIS. Jedes Strategienpaar $(x, y) \in \Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1}$ wird durch die nachfolgend erklärte stetige Abbildung

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccc} \Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1} & \rightarrow & \Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1} \\ (x, y) & \mapsto & (x', y') \end{array}$$

in ein Paar (x', y') überführt. Sei

$$\varphi_i(x, y) = \max(0, (Ay)_i - x^T Ay)$$

das Maximum von 0 und der Auszahlungsänderung an Spieler 1, wenn dieser seine gemischte Strategie in die i -te reine Strategie ändert, und analog

$$\psi_j(x, y) = \max(0, (x^T B)_j - x^T B y) .$$

Dann definiere die Vektoren $x' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ und $y' = (y'_1, \dots, y'_n)^T$ durch

$$(2.2) \quad x'_i = \frac{x_i + \varphi_i(x, y)}{1 + \sum_{k=1}^m \varphi_k(x, y)}, \quad y'_j = \frac{y_j + \psi_j(x, y)}{1 + \sum_{k=1}^n \psi_k(x, y)} .$$

Offensichtlich gilt $(x', y') \in \Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1}$.

Da die Abbildung (2.1) auf der kompakten, konvexen Menge $\Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1}$ nach dem Satz von Brouwer einen Fixpunkt hat, genügt es zu zeigen, dass jeder Fixpunkt der Abbildung ein Nash-Gleichgewicht ist.

Für alle reinen Antwortstrategien i des ersten Spielers auf die Wahl y des zweiten Spielers, die nicht strikt besser als x sind, gilt $\varphi_i(x, y) = 0$; dies gilt für wenigstens eine Strategie i . Ist (x, y) ein Fixpunkt der Abbildung (2.1), dann folgt aus (2.2) damit $\varphi_k(x, y) = 0$ für *alle* Strategien $k \in \{1, \dots, m\}$. Daher ist x eine beste Antwort auf y . Auf analoge Weise folgt, dass y auch eine beste Antwort auf x ist, so dass (x, y) ein Nash-Gleichgewicht ist. \square

Im „generischen“ Fall ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte endlich. Bei der expliziten Definition *nicht-degenerierter Spiele* fordert man in der Regel etwas mehr als lediglich die Tatsache, dass endlich viele Nash-Gleichgewichte vorliegen (vgl. [22]).

Definition 2.6. Ein Bimatrixspiel heißt *nicht-degeneriert*, wenn die Anzahl der reinen besten Antworten von Spieler 1 auf eine gemischte Strategie y von Spieler 2 niemals die Mächtigkeit der Trägermenge $\text{supp } y := \{j : y_j \neq 0\}$ übersteigt und ebensolches für die reinen besten Antworten von Spieler 2 gilt.

Bemerkung 2.7. Der Hintergrund dieser Definition ebenso wie die Tatsache, dass die Anzahl der Nash-Gleichgewichte in nicht-degenerierten Bimatrixspielen endlich ist, ergeben sich unmittelbar aus den späteren geometrischen Überlegungen (siehe Lemma 2.10). Degenerierte Spiele treten mit Lebesgue-Maß 0 auf.

Über die Existenz von Nash-Gleichgewichten hinaus ist bereits seit 1964 bekannt, dass die Anzahl der Nash-Gleichgewichte in nicht-degenerierten Bimatrixspielen immer ungerade ist (Lemke und Howson [8]). Ferner ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte nicht nur von m und n abhängig, sondern ganz massiv vom Spiel selbst.

Nach diesen klassischen strukturellen Ergebnissen stellt sich natürlich unmittelbar die Frage, wie viele Nash-Gleichgewichte ein nicht-degeneriertes $m \times n$ -Bimatrixspiel maximal haben kann. Erstaunlicherweise ist diese Frage noch offen.

Wir stellen zunächst mehrere äquivalente Charakterisierungen für Nash-Gleichgewichte bereit, die es ermöglichen, das Problem von verschiedenen geometrischen Blickwinkeln zu betrachten. Vom Standpunkt der reellen algebraischen Geometrie ist die Anzahlfrage von

Nash-Gleichgewichten beispielsweise eine Frage nach der maximalen Anzahl reeller Lösungen einer Klasse von Systemen polynomialer Gleichungen und Ungleichungen. Bezeichnen u und v die Auszahlungen des ersten bzw. zweiten Spielers, dann folgt aus Lemma 2.4 unmittelbar:

Lemma 2.8. *Ein Quadrupel (x, y, u, v) repräsentiert genau dann ein Nash-Gleichgewicht für das Bimatrixspiel, wenn (x, y, u, v) eine Lösung des polynomialen Gleichungssystems*

$$(2.3) \quad x^T \cdot (\mathbf{1}u - Ay) = 0, \quad y^T \cdot (\mathbf{1}v - B^T x) = 0$$

mit $x \in \Delta_{m-1}$, $y \in \Delta_{n-1}$, $u, v \in \mathbb{R}$ ist und die in Klammern stehenden Vektoren in (2.3) nichtnegativ sind. Hierbei bezeichnet $\mathbf{1}$ einen aus lauter Einsen bestehenden Spaltenvektor.

Um die kombinatorische Struktur der Lösungen zu analysieren, definieren wir für jede gemischte Strategie y des zweiten Spielers $\mathcal{R}^{(1)}(y)$ als die Menge der besten reinen Antworten von Spieler 1,

$$\mathcal{R}^{(1)}(y) = \left\{ i \in \{1, \dots, m\} : (Ay)_i = \max_{1 \leq k \leq m} (Ay)_k \right\},$$

und analog für jedes $x \in \Delta_{m-1}$

$$\mathcal{R}^{(2)}(x) = \left\{ j \in \{1, \dots, n\} : (x^T B)_j = \max_{1 \leq k \leq n} (x^T B)_k \right\}.$$

Ferner sei

$$\mathcal{G}_j^{(1)} = \{x \in \Delta_{m-1} : j \in \mathcal{R}^{(2)}(x)\}$$

die Menge der gemischten Strategien des ersten Spielers, gegen die die j -te reine Strategie des zweiten Spielers eine beste Antwort ist, $1 \leq j \leq n$. Ebenso sei

$$\mathcal{G}_i^{(2)} = \{y \in \Delta_{n-1} : i \in \mathcal{R}^{(1)}(y)\}.$$

Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $\mathcal{G}_j^{(1)}$ ein Polytop mit $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{G}_j^{(1)} = \Delta_{m-1}$, und im nicht-degenerierten Fall sind die Inneren je zweier dieser Mengen disjunkt, so dass sie eine „Partition“ von Δ_{m-1} definieren. Analoges gilt für die Mengen $\mathcal{G}_i^{(2)}$. Für das Beispiel 2.2 sind diese Partitionen in Abbildung 1 visualisiert.

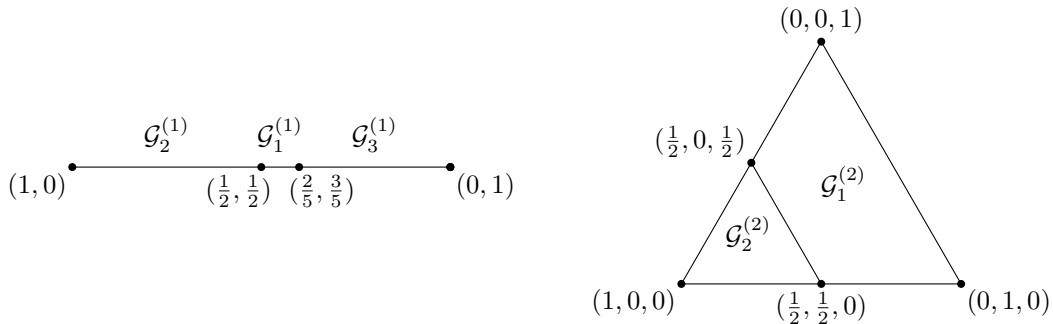


ABBILDUNG 1. Regionen der gemischten Strategien.

Mit dieser Begriffsbildung lässt sich die Charakterisierung aus Lemma 2.4 auch wie folgt notieren [20].

Lemma 2.9. *Ein gemischtes Strategienpaar (\bar{x}, \bar{y}) ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt $\bar{x}_i = 0$ oder $\bar{y} \in \mathcal{G}_i^{(2)}$;
- (2) für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\bar{y}_j = 0$ oder $\bar{x} \in \mathcal{G}_j^{(1)}$.

Dieses Lemma ermöglicht es, Nash-Gleichgewichte geometrisch zu charakterisieren. Jeden Punkt $x \in \Delta_{m-1}$ versehen wir mit einer Marke „ i “, wenn $x_i = 0$ ist ($1 \leq i \leq m$), und mit einer Marke „ $m + j$ “, wenn $x \in \mathcal{G}_j^{(1)}$ ($1 \leq j \leq n$). Jeden Punkt $y \in \Delta_{n-1}$ beschriften wir mit einer Marke „ $m + j$ “, wenn $y_j = 0$ ist ($1 \leq j \leq n$), und mit einer Marke „ i “, wenn $y \in \mathcal{G}_i^{(2)}$ ($1 \leq i \leq m$). Bezeichnen nun $L^{(1)}(x)$ und $L^{(2)}(y)$ die Mengen aller Marken von x bzw. y , dann folgt:

Lemma 2.10. *Ein Paar $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1}$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn $\{1, \dots, m + n\} \subset L^{(1)}(\bar{x}) \cup L^{(2)}(\bar{y})$.*

Im nicht-degenerierten Fall besitzt jeder Punkt $x \in \Delta_{m-1}$ höchstens m Marken und jeder Punkt $y \in \Delta_{n-1}$ höchstens n Marken.

Ausgerüstet mit diesen Charakterisierungen können wir nun die aktuell bekannten Schranken für die maximale Anzahl von Nash-Gleichgewichten erläutern. Die grundlegende initiale Beobachtung, dass ein Bimatrixspiel eine exponentielle Anzahl von Nash-Gleichgewichten in m und n besitzen kann, geht auf Quint und Shubik zurück, die die untere Schranke von $2^d - 1$ für den Fall $d := m = n$ zeigten [18]:

Lemma 2.11. *Das durch $A = B = I_d$ definierte Bimatrixspiel hat genau $2^d - 1$ Nash-Gleichgewichte, wobei I_d die $d \times d$ -Einheitsmatrix bezeichnet.*

BEWEIS. Aus Lemma 2.4 folgt für jedes Nash-Gleichgewicht (\bar{x}, \bar{y}) unmittelbar, dass alle nicht maximalen Komponenten \bar{x}_i von \bar{x} sofort $\bar{x}_i = \bar{y}_i = 0$ nach sich ziehen. Folglich haben alle von Null verschiedenen Komponenten des Teilvektors \bar{x} (und analog \bar{y}) eines Nash-Gleichgewichts den gleichen Wert, und es gilt $\bar{x} = \bar{y}$. Es existieren $2^d - 1$ verschiedene Möglichkeiten zur Wahl der Positionen der von Null verschiedenen Einträge, und für jede dieser Wahlen liegt nach Lemma 2.4 ein Nash-Gleichgewicht vor. \square

Besitzt einer der beiden Spieler nur sehr wenige reine Strategien, dann können lineare obere Schranken angegeben werden [3, 17]:

Lemma 2.12. *Für ein nicht-degeneriertes $m \times n$ -Bimatrixspiel gilt: Im Fall $m = 1$ existiert genau ein Nash-Gleichgewicht, im Fall $m = 2$ existieren höchstens $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ Nash-Gleichgewichte, und im Fall $m = 3$ existieren höchstens $2n + 1$ Nash-Gleichgewichte.*

BEWEIS. Im Fall $m = 1$ ist das Spiel genau dann nicht-degeneriert, wenn das Maximum in $\max_{1 \leq k \leq n} b_{kn}$ genau einmal angenommen wird, und in diesem Fall existiert genau ein Nash-Gleichgewicht.

Im Fall $m = 2$ ist $\Delta_{m-1} = \Delta_1$ das Segment mit Endpunkten $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$. Die Regionen $\mathcal{G}_j^{(1)}$ sind Teilsegmente, die sich höchstens in ihren Endpunkten schneiden.

Betrachtet man diese Unterteilung als Graphen, dann existieren folglich höchstens $n + 1$ Knoten (siehe Abbildung 2), und nur diese besitzen zwei Marken. Wegen der Konvexität der Regionen $\mathcal{R}_j^{(i)}$ ist jeder Punkt $x \in \Delta_1$ nur an höchstens einem Nash-Gleichgewicht beteiligt. Da die Anzahl der Nash-Gleichgewichte ungerade ist, folgt aus dieser oberen Schranke von $n + 1$ unmittelbar die Behauptung.

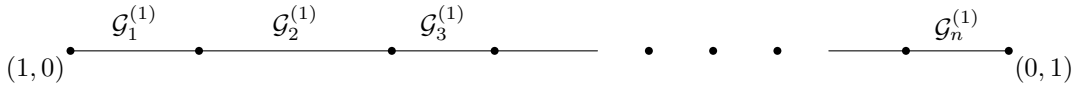


ABBILDUNG 2. Regionen des Wahrscheinlichkeitssimplexes Δ_1 des ersten Spielers in einem $2 \times n$ -Spiel.

Für $m = 3$ betrachten wir die Unterteilung des Simplexes $\Delta_{m-1} = \Delta_2$ des ersten Spielers als einen planaren Graphen in der Ebene. Bezeichnen f_0, f_1 und f_2 die Menge der Knoten, Kanten bzw. Flächen (einschließlich der äußeren Fläche), dann gilt nach der Eulerschen Formel $f_0 - f_1 + f_2 = 2$. Aufgrund der Nicht-Degeneriertheit ist jede der drei Ecken von Δ_2 zu genau zwei Knoten des Graphen inzident und jeder andere Knoten des Graphen zu genau zu drei Knoten inzident (vgl. das Beispiel in Abbildung 1). Folglich gilt $f_1 = \frac{3}{2}(f_0 - 1)$ und durch Einsetzen in die Eulersche Formel $f_0 = 2f_2 - 1$. Nach Konstruktion besteht die Unterteilung von Δ_2 aus höchstens n Regionen, so dass $f_0 \leq 2(n + 1) - 1 = 2n + 1$. In einem nicht-degenerierten $3 \times n$ -Bimatrixspiel existieren daher höchstens $2n + 1$ Nash-Gleichgewichte. \square

Für ein $d \times d$ -Spiel mit $d = 1, 2, 3$ liefert Lemma 2.12 die maximalen Anzahlen 1, 3, 7. Quint und Shubik vermuteten im Jahr 1994, dass sich diese obere Schranke von $2^d - 1$ für $d \in \{1, 2, 3\}$ auf $d > 3$ fortsetzt (und dann aufgrund der unteren Schranke von Lemma 2.11 scharf ist) [18]. Diese Vermutung wurde dadurch gestützt, dass Keiding [6] sowie auf alternative Weise McLennan und Park [11] für den schon wesentlich aufwendigeren Fall $d = 4$ die obere Schranke von $2^4 - 1 = 15$ zeigten. Darüber hinaus ist $2^d - 1$ für den Fall $A = B$ die scharfe obere Schranke [19]. Im Jahr 1999 wurde die Vermutung jedoch widerlegt.

Satz 2.13. (von Stengel [21].) *Für gerades d gibt es ein nicht-degeneriertes $d \times d$ -Spiel mit $\tau(d) := f(d/2) + f(d/2 - 1) - 1$ Nash-Gleichgewichten, wobei*

$$f(n) := \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \binom{n}{k}.$$

Für das asymptotische Wachstum von τ gilt $\tau(d) \sim 0.949 \frac{(1+\sqrt{2})^d}{\sqrt{d}}$.

Für kleine Werte ergibt sich die Wertetabelle

| | | | | | |
|-----------|---|----|----|-----|------|
| d | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| $2^d - 1$ | 3 | 15 | 63 | 255 | 1023 |
| $\tau(d)$ | 3 | 15 | 75 | 383 | 2003 |

Das erste Gegenbeispiel ergibt sich folglich für $d = 6$ mit 75 anstelle der von Quint und Shubik vermuteten 63 Nash-Gleichgewichte. Für ein 6×6 -Spiel ist die Zahl von 75 auch immer noch der aktuelle Rekord. Ob diese untere Schranke scharf ist, ist noch offen; wir werden später auch eine obere Schranke kennenlernen (siehe Satz 2.21). Ebenso ist noch offen, ob die Schranke $2^d - 1$ bereits für den Fall $d = 5$ übertroffen werden kann. Im folgenden sollen nun die grundlegenden geometrischen Ideen und Problematiken hinter Satz 2.13 präsentiert werden.

Zunächst überführen wir die geometrischen Unterteilungen der Wahrscheinlichkeitssimplexe Δ_{m-1} und Δ_{n-1} aus Abbildung 1 in eine auf Mangasarian zurückgehende Darstellung als *Polyeder* (d.h. als Durchschnitt endlich vieler Halbräume) [9]. Hierzu liften wir die Unterteilungen wie folgt in die nächsthöhere Dimension (wobei wir uns die hinzukommenden Koordinatenachsen vertikal nach oben gerichtet vorstellen). Zu einem gegebenen Punkt $\bar{x} \in \Delta_{m-1}$ betrachten wir den Punkt $v_0 := \max_{1 \leq j \leq n} (\bar{x}^T B)_j$ sowie alle darüber liegenden Punkte. Ebenso betrachten wir zu $\bar{y} \in \Delta_{n-1}$ den Punkt $u_0 := \max_{1 \leq i \leq m} (A\bar{y})_i$ sowie alle darüber liegenden Punkte. Für eine gegebene Strategie \bar{x} des ersten Spielers bezeichnet v_0 (bzw. analog u_0) die optimale Auszahlung für den zweiten Spieler. Formal liefert dies die folgenden Polyeder:

Definition 2.14. Für ein gegebenes Bimatrixspiel sind die *Mangasarian-Polyeder* \bar{P} und \bar{Q} als

$$(2.4) \quad \bar{P} = \{(\bar{x}, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : \underbrace{\bar{x} \geq 0}_{\text{Ungleichungen } 1, \dots, m}, \quad \underbrace{\bar{x}^T B \leq \mathbf{1}^T v}_{\text{Ungleichungen } m+1, \dots, m+n}, \quad \mathbf{1}^T \bar{x} = 1\},$$

$$(2.5) \quad \bar{Q} = \{(\bar{y}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \underbrace{A\bar{y} \leq \mathbf{1}u}_{\text{Ungleichungen } 1, \dots, m}, \quad \underbrace{\bar{y} \geq 0}_{\text{Ungleichungen } m+1, \dots, m+n}, \quad \mathbf{1}^T \bar{y} = 1\}$$

definiert. Wie in (2.4) und (2.5) angegeben, sind die definierenden Ungleichungen für jedes der beiden Polyeder in kanonischer Weise mit $1, \dots, m, m+1, \dots, n$ durchnummeriert.

Jedes der beiden Polyeder $\bar{P} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ und $\bar{Q} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ liegt in einer Hyperebene, bei der die Summe der \bar{x}_i bzw. \bar{y}_j gleich 1 ist, und ist durch $m+n$ weitere lineare Ungleichungen gegeben. Die Projektion der Kanten des Polyeders \bar{P} (bzw. \bar{Q}) unter Weglassen der letzten Koordinate liefert genau die Unterteilung von Δ_{m-1} (bzw. Δ_{n-1}) aus Abbildung 1. Abbildung 3 zeigt das Lifting der Regionen von Δ_1 sowie von Δ_2 für Beispiel 2.2.

Mit der Nummerierung der Ungleichungen aus Definition 2.14 lässt sich Lemma 2.4 auch wie folgt formulieren.

Lemma 2.15. *Ein gemischtes Paar $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta_{m-1} \times \Delta_{n-1}$ ist genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn $u, v \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $(\bar{x}, v) \in \bar{P}$, $(\bar{y}, u) \in \bar{Q}$ und für alle $i \in \{1, \dots, m+n\}$ die i -te Ungleichung von \bar{P} oder \bar{Q} bindend ist.*

Um nicht mit unterdimensionalen sowie unbeschränkten Polyedern sondern mit volldimensionalen Polytopen zu arbeiten, benutzen wir die folgende projektive Transformation. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann hierbei $a_{ij}, b_{ij} > 0$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) angenommen werden, da das Addieren einer festen Konstanten zu allen Auszahlungswerten eines der beiden Spielers die Menge der Nash-Gleichgewichte nicht ändert.

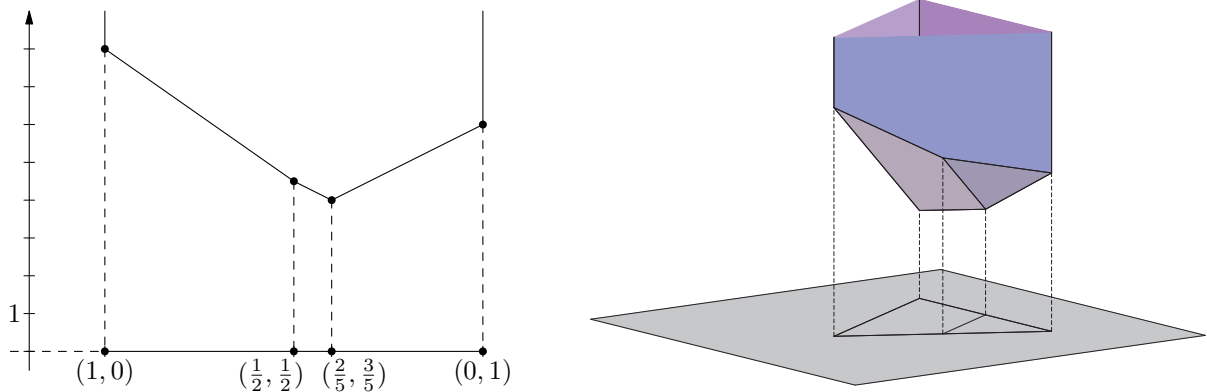


ABBILDUNG 3. Lifting der Regionen von Δ_1 sowie (in gedrehter Ansicht) von Δ_2 .

Wir betrachten den durch das Mangasarian-Polyeder \bar{P} (und ebenso \bar{Q}) erzeugten Kegel mit Spitze in 0 und schneiden diesen mit der Hyperebene $v = 1$ (bzw. $u = 1$); siehe Abbildung 4. Diese Überführung ist formal durch die Abbildungen $\bar{P} \rightarrow \mathbb{R}^m, (\bar{x}, v) \mapsto \bar{x}/v$ sowie $\bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^n, (\bar{y}, u) \mapsto \bar{y}/u$ gegeben. Die resultierenden topologischen Abschlüsse der Bilder sind die Polytope

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \underbrace{x \geq 0}_{\text{Ungleichungen } 1, \dots, m}, \underbrace{x^T B \leq \mathbf{1}^T}_{\text{Ungleichungen } m+1, \dots, m+n} \right\},$$

$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \underbrace{Ay \leq \mathbf{1}}_{\text{Ungleichungen } 1, \dots, m}, \underbrace{y \geq 0}_{\text{Ungleichungen } m+1, \dots, m+n} \right\}.$$

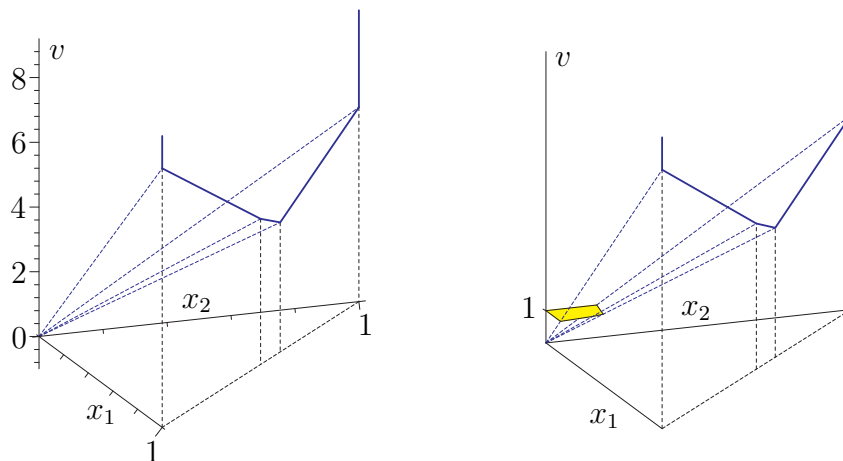


ABBILDUNG 4. Projektive Transformation.

Diese projektiven Abbildungen sind nichtlinear, erhalten aber – mit Ausnahme des neu in P und Q als Ecke hinzukommenden Nullpunktes – die Eckenstruktur der Polyeder, so dass gilt:

Lemma 2.16. *Die Nash-Gleichgewichte des Bimatrixspiels stehen in Bijektion zu den von $(0, 0)$ verschiedenen Punktepaaren $(x, y) \in P \times Q$, bei denen für alle $i \in \{1, \dots, m+n\}$ die i -te Ungleichung von P oder Q bindend ist. Ein von $(0, 0)$ verschiedenes Punktepaar $(x, y) \in P \times Q$ mit dieser Eigenschaft heißt komplementär.*

Im nicht-degenerierten Fall ist für jedes komplementäre Punktepaar $(x, y) \in P \times Q$ die erste Komponente eine Ecke von P und die zweite Komponente eine Ecke von Q ; denn da jedes komplementäre Punktepaar die Konvexkombination extremer komplementärer Punktepaare ist, ergäben sich sonst unendlich viele Nash-Gleichgewichte.

Von nun an beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall $d := m = n$. Die Polytope $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ sind durch die beschriebenen geometrischen Transformationen aus dem gegebenen Bimatrixspiel hervorgegangen und besitzen daher natürlich eine besondere geometrische Struktur. Im Fall, dass keine der Strategien eines Spielers in Hinblick auf die Auszahlungen strikt dominiert wird (und daher die zugehörige Ungleichung niemals bindend wäre), besitzen P und Q jeweils $2d$ Facetten. Ferner sind P und Q für nicht-degenerierte Spiele sogenannte *einfache* Polytope, d.h. jede Ecke ist in genau d Facetten enthalten.

Von Stengel hat nun gezeigt, dass der oben beschriebene Übergang von einem Bimatrixspiel zu einem Paar von Polytopen auch umgekehrt werden kann: Zwei *beliebige* einfache Polytope $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ mit $2d$ Facetten lassen sich unter schwachen Voraussetzungen durch eine affine Transformation in die benötigte Form überführen. Und für das dadurch entstandene Paar (P', Q') lässt sich explizit ein Bimatrixspiel angeben, das auf (P', Q') führt.

Wir wählen daher nun beliebige einfache Polytope $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ mit $2d$ Facetten, wobei sowohl die Facetten von P als auch die Facetten von Q mit den Zahlen $1, \dots, 2d$ beschriftet sind. Die Beschriftung $L(v)$ einer Ecke v sei definiert als die Menge der Beschriftungen der Facetten, in denen v enthalten ist. Ein Eckenpaar $(x, y) \in P \times Q$ heißt *komplementär*, wenn $L(x) \cup L(y) = \{1, \dots, 2d\}$. Von Stengels Resultat besagt nun:

Lemma 2.17. *Besitzen P und Q mindestens ein komplementäres Eckenpaar (x_0, y_0) , dann gibt es ein $d \times d$ -Bimatrixspiel (A, B) , so dass die Nash-Gleichgewichte von (A, B) in Bijektion mit den komplementären Paaren von P, Q außer (x_0, y_0) stehen.*

Durch dieses Lemma wird die Anzahlproblematik von Nash-Gleichgewichten auf die Konstruktion zweier Polytope $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ mit $2d$ beschrifteten Facetten zurückgeführt.

Beispiel 2.18. Als konkretes Beispiel im Dreidimensionalen kann man sich Würfel vorstellen, da diese einfach sind und 6 zweidimensionale Seiten besitzen. In Bild 5 sind $(1, 2, 4)$ und $(3, 5, 6)$ komplementäre Eckenpaare. Das Tripel $(2, 4, 6)$ des ersten Würfels findet keinen Partner im zweiten Würfel.

Bevor wir die besten bekannten Schranken diskutieren, sei kurz anhand eines Beispiels an die Dualitätstheorie für Polytope erinnert.

Exkurs 2.19. Zu jedem den Nullpunkt im Inneren enthaltenden Polytop P ist das *polare Polytop* P° als

$$P^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T y \leq 1\}$$

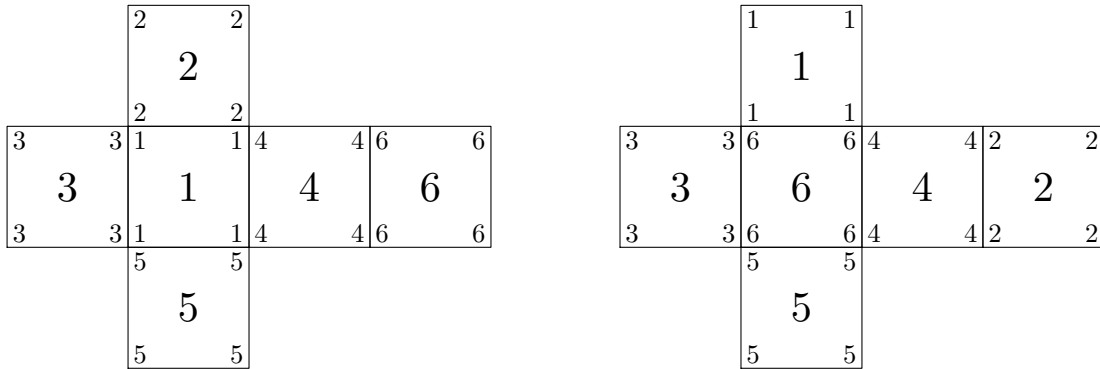


ABBILDUNG 5. Faltvorlagen zweier Würfel.

definiert. Der um die Einheitskugel umschriebene Würfel $P = [-1, 1]^3$ im \mathbb{R}^3 besitzt beispielsweise 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Seiten. Das zu P polare Polytop ist das Kreuzpolytop $\text{conv}\{\pm e_i : 1 \leq i \leq 3\}$ (wobei e_i den i -ten Einheitsvektor bezeichnet), welches 6 Ecken, 12 Kanten und 8 Seiten besitzt (siehe Abbildung 6).

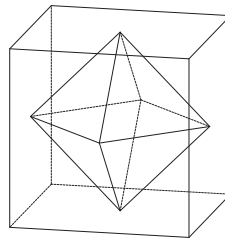


ABBILDUNG 6. Würfel $[-1, 1]^n$ und Kreuzpolytop $\text{conv}\{\pm e_i : 1 \leq i \leq 3\}$.

Da jede Ecke im Falle der Nicht-Degeneriertheit an höchstens einem komplementären Eckenpaar beteiligt sein kann, ergibt sich eine obere Schranke für die Anzahl der Nash-Gleichgewichte aus der maximalen Eckenzahl eines Polytops mit $2d$ Facetten im \mathbb{R}^d . Unter Verwendung der Polaritätstheorie stimmt diese Anzahl mit der maximalen Facettenanzahl eines Polytops mit $2d$ Ecken überein. Ein zentrales Resultat der Polytoptheorie – das sogenannte *Upper Bound Theorem* von McMullen – beantwortet diese Anzahlfrage (siehe z.B. [12, 24]).

Satz 2.20. *Ein Polytop im \mathbb{R}^d mit k Ecken besitzt höchstens*

$$(2.6) \quad \Phi_{d,k} := \begin{cases} \frac{k}{k-\frac{d}{2}} \binom{k-\frac{d}{2}}{k-d} & \text{falls } d \text{ gerade,} \\ 2 \binom{k-\frac{d+1}{2}}{k-d} & \text{falls } d \text{ ungerade} \end{cases}$$

viele Facetten. Ebenso besitzt ein Polytop im \mathbb{R}^d mit k Facetten höchstens $\Phi_{d,k}$ Ecken. Diese Schranken sind scharf.

Als Korollar ergibt sich die folgende obere Schranke für die Anzahl der Nash-Gleichgewichte:

Korollar 2.21. (Keiding, 1997.) *Ein nicht-degeneriertes $d \times d$ -Bimatrixspiel besitzt höchstens $\Phi_{d,2d} - 1$ Nash-Gleichgewichte.*

Für $d = 1, \dots, 6$ liefert dies die Zahlenwerte 1, 3, 7, 19, 41, 111.

Bei der Wahl der Polytope und Beschriftungen ist es eine Möglichkeit, zunächst einmal Polytope zu wählen, die bei gegebener Facettenzahl die durch das Upper Bound Theorem von McMullen bestimmte Eckenzahl realisieren. Hierzu zählen die sogenannten zyklischen Polytope, deren kombinatorische Struktur sehr gut verstanden ist und die wie folgt definiert sind. Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ die durch $g(t) := (t, t^2, \dots, t^d)^T$ definierte Momentenkurve. Für jede Wahl von $k \in \mathbb{N}$ und $t_1 < \dots < t_k \in \mathbb{R}$ heißt ein Polytop $C_d(t_1, \dots, t_k) := \text{conv}(g(t_1), \dots, g(t_k))$ *zyklisch*, wobei conv die konvexe Hülle bezeichnet. Da die kombinatorische Struktur der zyklischen Polytope nicht von den tatsächlichen numerischen Werten der Stützstellen t_1, \dots, t_k abhängt (siehe z.B. [24] und den nachfolgenden Satz 2.22), spricht man auch von *dem* zyklischen Polytop in Dimension d mit k Ecken.

Wenn für eine Auswahl von d der $2d$ Facetten eines polaren zyklischen Polytops entschieden werden soll, ob diese einen gemeinsamen Punkt des Polytops enthalten, gibt es dafür eine einfache Bedingung, die sogenannte Geradheitsbedingung von Gale. Hinter dieser verbirgt sich die wohlbekanntere Vandermonde-Determinante:

Satz 2.22. (Geradheitskriterium von Gale.) *Sei V die Eckenmenge eines zyklischen Polytops P mit der induzierten Ordnung \prec bezüglich der Momentenkurve (d.h. $g(t_1) \prec g(t_2)$ genau dann, wenn $t_1 < t_2$). Sei $F = \{v_1, \dots, v_d\} \subset V$ ein d -Tupel von Ecken von P , wobei $v_1 \prec v_2 \prec \dots \prec v_d$. Dann ist $\text{conv} F$ genau dann eine Facette von P , wenn für je zwei Ecken $u, v \in V \setminus F$ die Anzahl der Ecken $v_i \in F$ mit $u \prec v_i \prec v$ gerade ist.*

BEWEIS. Aus den bekannten Eigenschaften der Vandermonde-Determinante folgt sofort, dass je $d+1$ Punkte aus V affin unabhängig sind, so dass jede Facette genau d Punkte des zyklischen Polytops P enthält.

Für eine gegebene Indexmenge $I = \{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, k\}$ hat die Hyperebene durch die Punkte $g(t_{i_1}), \dots, g(t_{i_d})$ die Darstellung $H = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = 0\}$, wobei

$$f(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & g(t_{i_1}) & \dots & g(t_{i_d}) \end{pmatrix}.$$

Die konvexe Hülle der durch I gegebenen Punkte definiert genau dann eine Facette von P , wenn alle Punkte auf der gleichen Seite von H liegen, d.h., wenn die als Funktion in t betrachtete Funktion $f(g(t))$ zwischen je zwei Werten t_i und t_j mit $i < j$ und $i, j \notin I$ eine gerade Anzahl von Vorzeichenwechseln hat. \square

Das Geradheitskriterium erlaubt es, die Anzahl $\Phi_{d,k}$ der Facetten eines zyklischen Polytops mit k Ecken im \mathbb{R}^d mittels elementarer Kombinatorik abzuzählen, und es ergeben sich gerade die in (2.6) angegebenen Werte. Mit der Stirling-Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ erhält

man dann die Asymptotiken

$$\Phi_{d,2d} = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi d}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^d \approx \frac{0.9213}{\sqrt{d}} \cdot 2.5981^d, \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi d}} \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^d \approx \frac{0.7979}{\sqrt{d}} \cdot 2.5981^d. \end{cases}$$

In von Stengels Konstruktion für Satz 2.13 werden sowohl P als auch Q als die Polaren des zyklischen Polytops $C_d(2d)$ mit $2d$ Ecken gewählt, wobei vor dem Übergang zum Polaren noch eine Translation ausgeführt wird, damit 0 im Inneren der Polytope liegt. Die Polytope P und Q sind einfach.

Sind die Facetten von P in natürlicher Weise mit $1, \dots, 2d$ nummeriert, dann werden für Q die Beschriftungen der $(2i-1)$ -ten und der $2i$ -ten Facette vertauscht, also die Reihenfolge $2, 1, 4, 3, \dots, 2d, 2d-1$ gewählt. Für den Fall $d=6$ liefert diese Umnummerierung die (bis auf Symmetrie) eindeutig bestimmte Umnummerierung, die die — bei vorgegebener Wahl der Polytope — maximale Anzahl an komplementären Eckenpaaren liefert.

Die Wahl der Umnummerierung zusammen mit der Gale-Bedingung liefert eine kombinatorische Bedingung für die Anzahl der komplementären Eckenpaare. Durch detaillierte kombinatorische Betrachtungen lassen sich nun die komplementären Eckenpaare exakt abzählen und damit die Formel für $\tau(d)$ aus Satz 2.13 herleiten.

3. n -PERSONEN-SPIELE

Wir betrachten in diesem Abschnitt endliche n -Personen-Spiele, wobei n von nun an die Anzahl der Spieler bezeichnet. Jeder Spieler $i \in \{1, \dots, n\}$ besitzt eine nichtleere, endliche Menge reiner Strategien $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}$ mit $S^{(i)} = \{s_1^{(i)}, \dots, s_{d_i}^{(i)}\}$. Ein n -Personen-Spiel wird daher durch n Auszahlungstensoren $A^{(1)}, \dots, A^{(n)} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n}$ beschrieben.

Eine gemischte Strategie des i -ten Spielers ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge $S^{(i)}$ seiner reinen Strategien und kann folglich durch einen Punkt im Simplex Δ_{d_i-1} beschrieben werden. Sei Δ das n -fache kartesische Produkt $\Delta = \prod_{i=1}^n \Delta_{d_i-1}$ und $\Delta^{(-i)} = \prod_{j \neq i} \Delta_{d_j-1}$, $1 \leq i \leq n$.

Ist $p^{(i)} = (p_1^{(i)}, \dots, p_{d_i}^{(i)})$ die gewählte gemischte Strategie des i -ten Spielers, $1 \leq i \leq n$, dann beträgt die Auszahlung des i -ten Spielers

$$\pi^{(i)}(p) = \sum_{j_1=1}^{d_1} \sum_{j_2=1}^{d_2} \dots \sum_{j_n=1}^{d_n} A_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{(i)} p_{j_1}^{(1)} p_{j_2}^{(2)} \dots p_{j_n}^{(n)}.$$

Ein n -Tupel gemischter Strategien $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(n)}) \in \Delta$ heißt ein *Nash-Gleichgewicht*, wenn keiner der Spieler seine Auszahlung durch Wahl einer anderen Strategie verbessern kann, sofern alle anderen Spieler ihre Strategie beibehalten.

Eine *beste Antwort* von Spieler i auf gemischte Strategien $p^{(1)}, \dots, p^{(i-1)}, p^{(i+1)}, \dots, p^{(n)}$ der anderen Spieler ist eine gemischte Strategie $p^{(i)}$ mit

$$\pi_i(p) = \max_{s \in S^{(i)}} \pi_i(s, p^{(-i)}).$$

Hierbei bezeichnet $p^{(-i)}$ die Projektion von p auf $\Delta^{(-i)}$ und „ $s, p^{(-i)}$ “ ist eine abkürzende Notation für das n -Tupel gemischter Strategien, bei dem die Strategie von Spieler i in p durch die reine Strategie s ersetzt wird.

Wie im Bimatrixspiel ist ein n -Tupel $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(n)}) \in \Delta$ genau dann ein Nash-Gleichgewicht, wenn die Strategie jedes Spielers eine beste Antwort auf die Strategien der Kontrahenten ist. Zur Veranschaulichung der eingeführten Notation soll zunächst einmal wieder ein Blick auf Nashs Existenzsatz für Gleichgewichte geworfen werden [13, 14, 15].

Satz 3.1. *Jedes n -Personen-Spiel besitzt ein Nash-Gleichgewicht.*

BEWEIS. In Verallgemeinerung des Beweises von Satz 2.5 wird jedes n -Tupel $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(n)}) \in \Delta$ durch eine stetige Funktion

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} \Delta & \rightarrow & \Delta \\ p & \mapsto & p' \end{array}$$

wie folgt abgebildet. Sei

$$\varphi_j^{(i)}(p) = \max \left(0, \pi(s_j^{(i)}, p^{(-i)}) - \pi(p) \right)$$

das Maximum von 0 und der Auszahlungsdifferenz an Spieler i , wenn dieser seine gemischte Strategie in die j -te reine Strategie ändert, $1 \leq j \leq d_i$, $1 \leq i \leq n$. Dann definiere die Vektoren $(p')^{(i)} \in \Delta_{d_i-1}$, $1 \leq i \leq n$, durch

$$(p')_j^{(i)} = \frac{p_j^{(i)} + \varphi_j^{(i)}(p)}{1 + \sum_{k=1}^{d_i} \varphi_k^{(i)}(p)}, \quad 1 \leq j \leq d_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Nach der n -dimensionalen Version des Satzes von Brouwer besitzt die Abbildung (3.1) einen Fixpunkt. Wie in Satz 2.5 zeigt man, dass jeder solche Fixpunkt ein Nash-Gleichgewicht ist.

Für alle Antwortstrategien j des i -ten Spielers auf die gewählten Strategien $p^{(-i)}$ der anderen Spieler, die nicht strikt besser als $p^{(i)}$ sind, gilt $\varphi_j^{(i)}(p) = 0$. Ist p ein Fixpunkt der Abbildung (3.1), dann folgt $\varphi_k^{(i)}(p) = 0$ für alle $k \in \{1, \dots, d_i\}$. Daher ist $p^{(i)}$ eine beste Antwort auf die Strategien der anderen Spieler, $1 \leq i \leq n$, und p folglich ein Nash-Gleichgewicht. \square

Bemerkung 3.2. Im generischen Fall ist die Anzahl der Nash-Gleichgewichte ebenso wie bei Bimatrixspielen immer ungerade.

Im Gegensatz zu Bimatrixspielen, bei denen die Nash-Gleichgewichte durch polyedrische Strukturen beschrieben werden konnten, führt die Anzahlproblematik für n -Personen-Spiele auf nichtlineare Strukturen, welche noch viel weniger verstanden sind. Interessanterweise lässt sich mit Methoden der algebraischen Geometrie jedoch die maximale Anzahl sogenannter vollständig gemischter Gleichgewichte sehr gut charakterisieren (siehe [10, 23]). Hierbei heißt ein n -Tupel gemischter Strategien $p = (p^{(1)}, \dots, p^{(n)}) \in \Delta$ ein *vollständig gemischtes Nash-Gleichgewicht*, wenn jeder Spieler jede reine Strategie mit echt positiver Wahrscheinlichkeit verwendet, d.h. wenn $p_j^{(i)} \neq 0$, $1 \leq j \leq d_i$, $1 \leq i \leq n$.

Die Charakterisierung von Nash-Gleichgewichten mittels bester Antworten liefert unmittelbar die folgende Verallgemeinerung von Lemma 2.8.

Lemma 3.3. *Ein Paar $(p, v) \in \Delta \times \mathbb{R}^n$ repräsentiert genau dann ein Nash-Gleichgewicht für das n -Personen-Spiel, wenn (p, v) eine Lösung des polynomialen Gleichungssystems*

$$(3.2) \quad p_k^{(i)} \cdot \left(v^{(i)} - \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_{i-1}=1}^{d_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{d_{i+1}} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} A_{j_1 \cdots j_{i-1} k j_{i+1} \cdots j_n}^{(i)} p_{j_1}^{(1)} \cdots p_{j_{i-1}}^{(i-1)} p_{j_{i+1}}^{(i+1)} \cdots p_{j_n}^{(n)} \right) = 0$$

für $1 \leq k \leq d_i$ und $1 \leq i \leq n$ ist und jeder geklammerte Ausdruck in (3.2) nichtnegativ ist.

Im Falle vollständig gemischter Nash-Gleichgewichte gilt $p_k^{(i)} \neq 0$, so dass der linke Faktor des Produkts in (3.2) weggelassen werden kann. Für den Spezialfall von 2-Personen-Spielen liefert dies ein lineares Gleichungssystem, so dass dann höchstens ein vollständig gemischtes Nash-Gleichgewicht vorliegt.

Im allgemeinen n -Personen-Fall liefert die Elimination der Variablen $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ das äquivalente Gleichungssystem

$$(3.3) \quad \sum_{j_1=1}^{d_1} \cdots \sum_{j_{i-1}=1}^{d_{i-1}} \sum_{j_{i+1}=1}^{d_{i+1}} \cdots \sum_{j_n=1}^{d_n} \left(A_{j_1 \cdots j_{i-1} k j_{i+1} \cdots j_n}^{(i)} - A_{j_1 \cdots j_{i-1} 1 j_{i+1} \cdots j_n}^{(i)} \right) p_{j_1}^{(1)} \cdots p_{j_{i-1}}^{(i-1)} p_{j_{i+1}}^{(i+1)} \cdots p_{j_n}^{(n)} = 0,$$

$2 \leq k \leq d_i$, $1 \leq i \leq n$. Durch Elimination der Variablen $p_{d_1}^{(1)}, \dots, p_{d_n}^{(n)}$ mittels der Beziehungen $p_{d_i}^{(i)} = 1 - \sum_{j=1}^{d_i-1} p_j^{(i)}$ ergibt sich ein Gleichungssystem mit $N := \sum_{i=1}^n d_i - n$ Gleichungen vom totalen Grad $n - 1$ in N Variablen, das für generische Auszahlungstensoren eine endliche Anzahl an Lösungen besitzt. Das Gleichungssystem ist multilinear und damit dünnbesetzt in dem Sinne, dass unter allen möglichen Monomen vom totalen Grad $\leq n - 1$ in den Variablen $p_k^{(i)}$ nur wenige auftreten.

Im Falle derartiger Dünnbesetztheit erlaubt der nachfolgend erläuterte *Satz von Bernstein*, mit Hilfe des aus der klassischen Konvexgeometrie bekannten Funktionals des gemischten Volumens obere Schranken für die Anzahl der von Null verschiedenen komplexen Lösungen anzugeben (siehe z.B. [4, §7.5] für eine schöne Darstellung).

Für ein Polynom f der Form $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ sei

$$\text{NP}(f) := \text{conv}\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : c_\alpha \neq 0\}$$

das *Newton-Polytop* von f . Für beliebige Polytope $P_1, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^n$ ist das n -dimensionale Volumen der Minkowski-Summe $\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$,

$$\text{Vol}_n(\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n),$$

ein Polynom vom totalen Grad höchstens n in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Das *gemischte Volumen* $\text{MV}(P_1, \dots, P_n)$ ist der Koeffizient des Monoms $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ in diesem Polynom. Ein besonders einfacher Spezialfall – der sich im folgenden als sehr nützlich erweisen wird — liegt vor, wenn P_i die konvexe Hülle von 0 und dem i -ten Einheitsvektor ist, $1 \leq i \leq n$ (siehe Abbildung 7 für den Fall $n = 2$). In diesem Fall gilt $\text{MV}(P_1, \dots, P_n) = 1$.

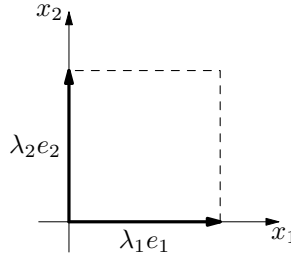


ABBILDUNG 7. Für die beiden Einheitssegmente $P_1 = \text{conv}\{0, e_1\}$ und $P_2 = \text{conv}\{0, e_2\}$ gilt wegen $\text{Vol}_2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 \lambda_2$ die Eigenschaft $\text{MV}(P_1, P_2) = 1$.

Für die Anzahl der Nullstellen eines dünnbesetzten polynomialen Gleichungssystems in $(\mathbb{C}^*)^n$ existiert folgende Schranke:

Satz 3.4. (Bernstein [2].) *Seien f_1, \dots, f_n Polynome in den Variablen x_1, \dots, x_n . Dann ist die Anzahl der isolierten Nullstellen von*

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$$

im algebraischen Torus $(\mathbb{C}^)^n$ nach oben durch das gemischte Volumen der Newton-Polytope*

$$\text{MV}(\text{NP}(f_1), \dots, \text{NP}(f_n))$$

beschränkt. Für generische Polynome f_1, \dots, f_n ist diese Schranke mit Gleichheit erfüllt.

Für generische Auszahlungstensoren hat jedes Polynom in (3.3) mit einem festen oberen Index i das Newton-Polytop

$$\Delta^{(i)} := \bar{\Delta}_{d_1-1} \times \dots \times \bar{\Delta}_{d_{i-1}-1} \times \{0\} \times \bar{\Delta}_{d_{i+1}-1} \times \dots \times \bar{\Delta}_{d_n-1},$$

wobei $\bar{\Delta}_{d_i-1}$ die konvexe Hülle der Einheitsvektoren und des Ursprungs im \mathbb{R}^{d_i-1} bezeichnet. Mit Hilfe des Satzes von Bernstein ergibt sich unmittelbar:

Lemma 3.5. *Die maximale Anzahl vollständig gemischter Nash-Gleichgewichte in einem n -Personen-Spiel beträgt höchstens*

$$\text{MV}(\underbrace{\Delta^{(1)}, \dots, \Delta^{(1)}}_{(d_1-1)\text{-mal}}, \underbrace{\Delta^{(2)}, \dots, \Delta^{(2)}}_{(d_2-1)\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\Delta^{(n)}, \dots, \Delta^{(n)}}_{(d_n-1)\text{-mal}}).$$

Dieses gemischte Volumen stimmt bis auf einen Faktor $\prod_{i=1}^n (d_i-1)!$ mit dem gemischten Volumen

$$(3.4) \quad \text{MV}(\underbrace{\square^{(1)}, \dots, \square^{(1)}}_{(d_1-1)\text{-mal}}, \underbrace{\square^{(2)}, \dots, \square^{(2)}}_{(d_2-1)\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\square^{(n)}, \dots, \square^{(n)}}_{(d_n-1)\text{-mal}}),$$

überein, wobei

$$\square^{(i)} := \bar{\square}_{d_1-1} \times \dots \times \bar{\square}_{d_{i-1}-1} \times \{0\} \times \bar{\square}_{d_{i+1}-1} \times \dots \times \bar{\square}_{d_n-1}$$

und $\bar{\square}_{d_i-1}$ den von den Einheitsvektoren im \mathbb{R}^{d_i-1} aufgespannte Würfel bezeichnet.

Durch Ausnutzung der Multilinearität des gemischten Volumens lässt sich das gemischte Volumen in (3.4) auf den Spezialfall des gemischten Volumens von Einheitssegmenten zurückführen. Jeder Summand hat dabei die Form

$$(3.5) \quad \text{MV}(w_1^{(1)}, \dots, w_{d_1-1}^{(1)}, w_1^{(2)}, \dots, w_{d_n-1}^{(n)}),$$

wobei jedes $w_q^{(p)}$ ein zu einer Variablen aus $\{p_k^{(i)} : 2 \leq k \leq d_i, 1 \leq i \leq n\}$ korrespondierendes Einheitssegment ist. Da das gemischte Volumen (3.5) im Falle affiner Abhängigkeit der Segmente verschwindet, sind nur solche Summanden von Null verschieden, für die die n Mengen $B_i := \{w_1^{(i)}, \dots, w_{d_i-1}^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq n$, eine Partition der N -elementigen Menge $\{p_k^{(i)} : 2 \leq k \leq d_i, 1 \leq i \leq n\}$ mit $|B_i| = d_i - 1$ definieren, bei der der i -te Block keine Variable mit oberem Index i enthält. Jede solche Partition kann genau $\prod_{i=1}^n (d_i - 1)!$ mal realisiert werden, so dass wir zusammenfassend erhalten:

Satz 3.6. (McKelvey und McLennan [10].) *Die maximale Anzahl vollständig gemischter Nash-Gleichgewichte in einem nicht-degenerierten n -Personen-Spiel ist nach oben beschränkt durch die Anzahl der Partitionen einer N -elementigen Menge $\{p_k^{(i)} : 2 \leq k \leq d_i, 1 \leq i \leq n\}$ in n disjunkte Teilmengen B_1, \dots, B_n so dass die Kardinalität des i -ten Blockes B_i genau $d_i - 1$ beträgt und der i -te Block keine Variable mit oberem Index i enthält.*

Beispiel 3.7. Für Bimatrixspiele mit d_1 bzw. d_2 Strategien existiert nur die Partition $(\{p_2^{(2)}, \dots, p_{d_2}^{(2)}\}, \{p_2^{(1)}, \dots, p_{d_1}^{(1)}\})$, in Übereinstimmung mit obiger Aussage über höchstens ein vollständig gemischtes Nash-Gleichgewicht.

Für drei Spieler und jeweils zwei Strategien existieren die Partitionen

$$(3.6) \quad (\{p_2^{(1)}\}, \{p_2^{(3)}\}, \{p_2^{(2)}\}) \quad \text{sowie} \quad (\{p_2^{(3)}\}, \{p_2^{(1)}\}, \{p_2^{(2)}\}),$$

so dass es höchstens zwei vollständig gemischte Nash-Gleichgewichte gibt.

In einem 3-Personen-Spiel mit $d_1 = 3$, $d_2 = d_3 = 2$ ist

$$\Delta^{(1)} = \{0\} \times \bar{\Delta}_1 \times \bar{\Delta}_1, \quad \Delta^{(2)} = \bar{\Delta}_2 \times \{0\} \times \bar{\Delta}_1, \quad \Delta^{(3)} = \bar{\Delta}_2 \times \bar{\Delta}_1 \times \{0\},$$

so dass es die zwei Partitionen $(\{p_2^{(2)}, p_2^{(3)}\}, \{p_2^{(1)}\}, \{p_3^{(1)}\})$ sowie $(\{p_2^{(2)}, p_2^{(3)}\}, \{p_3^{(1)}\}, \{p_2^{(1)}\})$ gibt.

McKelvey und McLennan haben durch Angabe expliziter Konstruktionen darüber hinaus gezeigt, dass die Schranke in Satz 3.6 scharf ist.

Schließlich lässt sich Satz 3.6 dazu nutzen, die maximale Anzahl der vollständig gemischten Nash-Gleichgewichte für n -Personen-Spiele, bei denen jeder Spieler genau zwei reine Strategien besitzt, explizit zu bestimmen.

Korollar 3.8. *Die maximale Anzahl vollständig gemischter Nash-Gleichgewichte für $d_1 = \dots = d_n = 2$ stimmt mit der Anzahl der fixpunktfreien Permutationen („Derangements“) der Länge n überein.*

Diese wohlbekannte Zahlenfolge (siehe z.B. [5, Kap. 5]) beginnt für $n \geq 2$ mit den Werten 1, 2, 9, 44, 265, ...

BEWEIS. Wie in (3.6) für $n = 3$ ausgeführt ist die Anzahl aus Satz 3.6 für $d_1 = \dots = d_n = 2$ exakt die Anzahl der Partitionen einer n -elementigen Menge $\{p_2^{(i)} : 1 \leq i \leq n\}$ in n disjunkte, einelementige Teilmengen B_1, \dots, B_n mit $B_i \neq \{i\}$. \square

Danksagung. Danke an Carsten Lange und Günter Ziegler für hilfreiche Anmerkungen sowie an einen anonymen Gutachter für sehr konstruktive Verbesserungsvorschläge.

LITERATUR

- [1] *A Beautiful Mind*. Film mit Russell Crowe. Produzent Brian Grazer, Regisseur Ron Howard, Universal Pictures, 2001.
- [2] D.N. Bernstein. The number of roots of a system of equations. *Functional Anal. Appl.* 9:183–185, 1975.
- [3] P. Borm, A. Gijsberts, S.H. Tijs. A geometric-combinatorial approach to bimatrix games. *Methods Oper. Res.* 59:199–209, 1989.
- [4] D. Cox, J. Little, D. O’Shea. *Using Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Math. 185, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [5] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 2. Auflage, 1994.
- [6] H. Keiding. On the maximal number of Nash equilibria in an $n \times n$ bimatrix game. *Games Econom. Behavior* 21:148–160, 1997.
- [7] H.W. Kuhn, S. Nasar (Hrsg.): *The Essential John Nash*. Princeton University Press, 2002.
- [8] C.E. Lemke, J.T. Howson. Equilibrium points of bimatrix games. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 12:413–423, 1964.
- [9] O.L. Mangasarian. Equilibrium points of bimatrix games. *J. Soc. Industr. Appl. Math.* 12:778–780, 1964.
- [10] R. McKelvey, A. McLennan. The maximal number of regular totally mixed Nash equilibria. *J. Econom. Theory* 72:411–425, 1997.
- [11] A. McLennan, I.-U. Park. Generic 4×4 two person games have at most 15 Nash equilibria. *Games Econom. Behavior* 26:111–130, 1997.
- [12] K. Mulmuley. *Computational Geometry: An Introduction Through Randomized Algorithms*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [13] J. Nash. Equilibrium points in n -person games. *Proc. Amer. Math. Soc.* 36:48–49, 1950.
- [14] J. Nash. *Non-Cooperative Games*. Dissertation, Princeton University, 1950.
- [15] J. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics* 54:286–295, 1951.
- [16] C.H. Papadimitriou. Algorithms, games and the Internet. In *Proc. 33rd ACM Symposium on Theory of Computing*, Chersonissos, Kreta, 749–753, 2001.
- [17] T. Quint, M. Shubik. On the number of Nash equilibria in a bimatrix game. Cowles Foundation Discussion Paper 1089, Yale University, 1994.
- [18] T. Quint, M. Shubik. A theorem on the number of Nash equilibria in a bimatrix game. *Internat. J. Game Theory* 26:353–359, 2002.
- [19] T. Quint, M. Shubik. A bound on the number of Nash equilibria in a coordination game. *Econom. Letters* 77:323–327, 2002.
- [20] L.S. Shapley. A note on the Lemke-Howson algorithm. *Math. Program. Study* 1:175–189, 1974.
- [21] B. von Stengel. New maximal numbers of equilibria in bimatrix games. *Discrete Comput. Geom.* 21:557–568, 1999.
- [22] B. von Stengel. Computing equilibria for two-person games. In R.J. Aumann, S. Hart (Hrsg.), *Handbook of Game Theory*, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [23] B. Sturmfels. *Solving Systems of Polynomial Equations*. CBMS Regional Conference Series in Math., vol. 97, AMS, Providence, RI, 2002.
- [24] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Math. 152, Springer-Verlag, New York, 1995.