

POSITIVE POLYNOME UND SEMIDEFINITE OPTIMIERUNG

CORDIAN RIENER UND THORSTEN THEOBALD

ZUSAMMENFASSUNG. Ausgehend von der Frage, wie die Nichtnegativität eines reellen Polynoms $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ entschieden werden kann, geben wir einen Überblick über Entwicklungen der vergangenen Jahre, die das Gebiet der Optimierung (insbesondere der semidefiniten Optimierung) in neuartiger Weise mit der reellen algebraischen Geometrie verbunden haben. Die Ausgangsidee dieser Entwicklungen ist es, den Kegel der nichtnegativen Polynome durch den Kegel der Summen von Quadraten von Polynomen zu approximieren.

1. EINLEITUNG

Eine grundlegende algorithmische Frage der reellen algebraischen (bzw. der semialgebraischen) Geometrie ist es, für ein gegebenes Polynom p im Ring $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ der reellen Polynome in X_1, \dots, X_n zu entscheiden, ob p *nichtnegativ* ist, das heißt, ob $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Vom Standpunkt der globalen Optimierung bedeutet dies, zu entscheiden, ob für das globale Minimum p^* (sofern existent) von p gilt, dass $p^* \geq 0$.

Ist ein solches Problem durch rationale Eingabedaten beschrieben, dann ist es aufgrund fundamentaler Resultate von Tarski [31] entscheidbar, und es existieren exakte Algorithmen (Zylindrische algebraische Dekomposition, Methode der kritischen Punkte; siehe beispielsweise die Monographie von Basu, Pollack und Roy [2]). Die Komplexität dieser Verfahren ist jedoch superpolynomial in der Anzahl n der Eingabevariablen; vom praktischen Standpunkt sind algorithmische Nichtnegativitätsfragen daher bereits für kleine Dimension sehr schwierig.

In den vergangenen Jahren haben sich neue Paradigmen für die Behandlung semialgebraischer Probleme erfolgreich etabliert, die neuartige Brücken zwischen der Optimierung und der semialgebraischen Geometrie herstellen. Um die zugrunde liegenden Ideen zu illustrieren, betrachten wir das Problem, die Nichtnegativität eines nach unten beschränkten Polynoms $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ zu entscheiden. Vom Blickwinkel der Optimierung fragen wir hierzu nach einem globalen Minimalpunkt p^* von p . Exakte Algorithmen für diese Aufgabe berechnen etwa alle kritischen Punkte und dann das Minimum der Funktionswerte für diese Punkte. Diese Methoden stoßen bereits für kleine Werte von n an ihre Grenzen. Klassische numerische Methoden der nichtlinearen oder globalen Optimierung hingegen zielen im Wesentlichen auf die Bestimmung lokaler Optima ab und werden dann durch verschiedene algorithmische Techniken verbessert.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 12D15, 90C22, 13J30, 90C26.

Key words and phrases. Positive Polynome, semidefinite Optimierung, Summe von Quadraten, Momentenproblem, Positivstellensatz.

Ein auf N.Z. Shor aus dem Jahr 1987 zurückgehender und durch Lasserre [17] sowie (in dualer Form) durch Parrilo [22] vorangetriebener Ansatz stellt eine fundamentale Verbindung zwischen der semialgebraischen Geometrie und der Optimierung her. Vom Blickwinkel der Arbeit [22] ist die Ausgangsidee, das größte $\lambda \in \mathbb{R}$ zu berechnen, so dass $p(X) - \lambda$ eine Summe von Quadraten in $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ist. Natürlich ist λ eine untere Schranke des Optimalwertes p^* . Die untere Schranke kann effizient mittels *semidefiniter Optimierung* berechnet werden, das sind lineare Programme über dem Kegel der positiv semidefiniten Matrizen [8]. In den letzten fünfzehn Jahren hat die semidefinite Optimierung eine beträchtliche Entwicklung erfahren, sowohl in theoretischer Hinsicht (z.B. Dualitätstheorie [1], Geometrie der Zulässigkeitsbereiche [24, 25], algebraischer Grad der Lösungen [20]), als auch in Hinblick auf Optimierungsalgorithmen (für Einzelheiten siehe Abschnitt 5). Bereits in der beschriebenen „naiven“ Verwendung liefern die berechneten Schranken oft überraschend gute Resultate. Diese Idee wurde mittlerweile unter Zuhilfenahme tiefgehender Resultate der semialgebraischen Geometrie (Hilberts 17. Problem der Darstellbarkeit nichtnegativer Polynome; Positivstellensätze) in vielfacher Hinsicht weiterentwickelt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen Überblick über diese Entwicklungen sowie die dadurch entstandene enge Verbindung zwischen der semidefiniten Optimierung und der reellen algebraischen Geometrie zu geben. Wir betrachten hierzu restringierte polynomiale Optimierungsprobleme der Form

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & \inf p(x) \\ & \text{s.t. } g_i(x) \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \\ & \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit Polynomen $g_i \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Diese Klasse enthält insbesondere auch die linearen und die quadratischen Optimierungsprobleme. Während sich lineare Optimierungsprobleme und konvex-quadratische Optimierungsprobleme sowohl theoretisch als auch praktisch effizient lösen lassen, sind bereits quadratische Optimierungsprobleme im nicht-konvexen Fall NP-schwer.

Abschnitt 2 stellt zunächst einige klassische Aussagen über positive Polynome und Summen von Quadraten zusammen. In Abschnitt 3 diskutieren wir Positivstellensätze und in Abschnitt 4 die duale Sichtweise des Momentenproblems. In Abschnitt 5 geben wir eine Einführung in die semidefinite Optimierung, und Abschnitt 6 behandelt aufbauend darauf die Optimierung von Polynomen. Abschließend skizzieren wir in Abschnitt 7 einige aktuelle Entwicklungen.

2. POSITIVE POLYNOME

Sei im folgenden $\mathcal{P}_{n,d}$ die Menge der nichtnegativen Polynome $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vom totalen Grad $\leq d$ und $\Sigma_{n,d}$ die Teilmenge derjenigen Polynome, die sich als Summe von Quadraten von Polynomen darstellen lassen (*sum of squares*; kurz: „SOS“). Die Geschichte des Zusammenhangs zwischen positiven Polynomen und Summen von Quadraten ist sehr reichhaltig (siehe etwa den Übersichtsartikel von Reznick [28]).

Natürlich ist jede Summe von Quadraten von Polynomen nichtnegativ. Im univariaten Fall ($n = 1$) gilt auch die Umkehrung. Die komplexen Nullstellen eines univariaten Polynoms $p \in \mathbb{R}[x]$ treten in konjugierten Paaren auf, so dass eine Darstellung $p = q\bar{q}$ mit

einem komplexen Polynom q existiert; aus der Zerlegung $q = q_1 + iq_2$ mit reellen Polynomen q_1, q_2 folgt dann $p = q_1^2 + q_2^2$. Folglich ist jedes nichtnegative univariate Polynom als Summe von Quadraten von Polynomen darstellbar, das heißt $\mathcal{P}_{1,d} = \Sigma_{1,d}$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

In der multivariaten Situation gilt diese Umkehrung im Allgemeinen nicht mehr. Im Jahr 1888 bewies der 26-jährige Hilbert die folgende Aussage.

Satz 2.1. *Für die Inklusion $\Sigma_{n,d} \subseteq \mathcal{P}_{n,d}$ gilt Gleichheit in genau den folgenden Fällen:*

- (1) *univariater Fall: $n = 1$;*
- (2) *quadratischer Fall: $d = 2$;*
- (3) *$n = 2, d = 4$ (in der homogenen Variante „ternäre Quartiken“).*

Diese Aussage ist in zweifacher Hinsicht bemerkenswert: zum einen zeigt sie $\mathcal{P}_{2,4} = \Sigma_{2,4}$, und zum anderen besagt sie, dass die genannten Fälle *alle* Fälle charakterisieren, in denen Gleichheit vorliegt. Hilberts Beweis der zu zeigenden strikten Inklusionen war nicht-konstruktiv, und die ersten expliziten Angaben von nichtnegativen Polynomen, die nicht Summen von Quadraten sind, werden erst Motzkin (1967) zugeschrieben. Beispielsweise ist das *Motzkin-Polynom*

$$x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

nichtnegativ, aber keine Summe von Quadraten. (Dies zeigt also $\Sigma_{2,6} \subsetneq \mathcal{P}_{2,6}$.)

In seiner berühmten Ansprache in Paris im Jahr 1900 stellte Hilbert die Frage, ob jedes nichtnegative Polynom eine Darstellung als Summe von Quadraten *rationaler* Funktionen hat (Hilberts 17. Problem). Artin gab im Jahr 1927 eine positive Antwort (siehe [4, 26]):

Satz 2.2. *Jedes nichtnegative Polynom $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ist eine Summe von Quadraten rationaler Funktionen.*

3. POSITIVSTELLENSÄTZE

Lässt sich für ein Polynom p eine Darstellung als Summe von Quadraten angeben, so liefert diese Darstellung ein *Zertifikat*, das heißt, einen Nachweis, für die Nichtnegativität von p . Die Frage nach Zertifikaten spielt in der Optimierung und für algorithmische Zwecke eine zentrale Rolle. Eine der bekanntesten Formen eines solchen Zertifikats findet sich im *Lemma von Farkas* der linearen Optimierung (das in vielen verschiedenen Varianten formuliert werden kann). Im folgenden bezeichne

$$(3.1) \quad K = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

den zulässigen Bereich von (1.1).

Satz 3.1. *Seien p und g_1, \dots, g_m affin-lineare Funktionen. Ist p nichtnegativ auf K , dann existieren Skalare $\lambda_0, \dots, \lambda_m \geq 0$ mit*

$$p = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j.$$

Die Angabe von nichtnegativen Skalaren $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ liefert damit ein Zertifikat für die Nichtnegativität der affinen Funktion p auf K . Eine Verallgemeinerung von Farkas' Lemma auf konvexe bzw. konkave Funktionen lautet:¹

Satz 3.2. *Seien $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkave Funktionen. Ferner gelte eine der beiden folgenden Bedingungen:*

- (1) *Es existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_1(x) > 0, \dots, g_m(x) > 0$ (Slater-Bedingung).*
- (2) *Die Funktionen g_1, \dots, g_m sind affin.*

Ist p nichtnegativ auf K , dann existieren $\lambda_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ mit

$$p = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j$$

auf \mathbb{R}^n .

Die Frage nach Lösungen eines Systems polynomialer Gleichungen ist eine der Wurzeln der algebraischen Geometrie. Der Hilbertsche Nullstellensatz, der einen Zusammenhang zwischen den algebraischen Varietäten des \mathbb{C}^n und den Idealen in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ herstellt, liefert ein Zertifikat für die Nichtexistenz einer gemeinsamen Lösung eines Systems polynomialer Gleichungen. Bezeichnet man das durch gegebene Polynome $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ erzeugte Ideal mit $\mathcal{I}(f_1, \dots, f_r)$, so gilt:

Satz 3.3. (Hilberts Nullstellensatz.) *Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:*

- (1) *Die Menge $\{x \in \mathbb{C}^n : f_i(x) = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq r\}$ ist leer.*
- (2) *$1 \in \mathcal{I}(f_1, \dots, f_r)$, das heißt, es existieren $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ mit*

$$(3.2) \quad f_1 h_1 + \dots + f_r h_r = 1.$$

Aus der Frage nach der *algorithmischen Bestimmung* eines solchen algebraischen Zertifikats hat sich die Theorie der Gröbnerbasen entwickelt (für eine Einführung siehe etwa [7, 15]). Inhärente Schwierigkeit hierbei ist, dass die Grade der Polynome in der Darstellung (3.2) doppelt exponentiell in der Dimension n anwachsen können.

Ein Analogon für reell algebraische Probleme wurde von Krivine [16] und Stengle [30] bewiesen (zur historischen Entwicklung siehe [26]). Dieser Positivstellensatz garantiert die Existenz eines Zertifikats für die Nichtnegativität. Hierzu sei $\mathcal{A}(g_1, \dots, g_r)$ der durch die Polynome g_1, \dots, g_r erzeugte *algebraische Kegel*, das heißt

$$\mathcal{A}(g_1, \dots, g_m) = \left\{ p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] : p = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} s_I \prod_{i \in I} g_i \right\}$$

mit Polynomen $s_I \in \Sigma$, wobei

$$\Sigma = \{ p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] : p \text{ ist eine Summe von Quadraten} \}.$$

Ferner sei $\mathcal{M}(h_1, \dots, h_t)$ das durch die Polynome h_1, \dots, h_t definierte Monoid, das heißt, die Menge der (endlichen) Produkte der Polynome einschließlich des leeren Produkts.

¹In der Optimierung wird in (3.1) oft die umgekehrte Ungleichungsrelation „ $g_i(x) \leq 0$ “ zugrunde gelegt. Daher entspricht der von uns betrachtete Fall konkaver Funktionen g_i dort dem konvexen Fall.

Satz 3.4. (Positivstellensatz.) *Für Polynome $f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_t \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- Die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) = 0, g_j(x) \geq 0, h_k(x) \neq 0 \quad \forall i, j, k\}$$

ist leer.

- Es existieren Polynome $F \in \mathcal{I}(f_1, \dots, f_r)$, $G \in \mathcal{A}(g_1, \dots, g_m)$ und $H \in \mathcal{M}(h_1, \dots, h_t)$ mit

$$F + G + H^2 = 0.$$

Ein Polynom p ist daher genau dann nichtnegativ auf einer Menge $K = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \geq 0, 1 \leq i \leq m\}$, falls ein $k \in \mathbb{N}_0$ sowie ein $F \in \mathcal{A}(-p, g_1, \dots, g_m)$ existieren mit $F + p^{2k} = 0$. Um ein Polynom auf der Menge K zu minimieren, ist also das größte γ zu bestimmen, so dass das Polynom $p - \gamma$ ein solches Zertifikat besitzt. Auch die algebraischen Zertifikate für die Nichtnegativität von Polynomen auf einer semialgebraischen Menge K können wir auf diese Weise vom Standpunkt der Optimierung betrachten.

Hauptproblematik dieses Vorgehens ist, dass die existierenden Beweise des Positivstellensatzes nicht konstruktiv sind, das heißt, sie liefern keine algorithmische Vorgehensweise, um ein Zertifikat zu bestimmen. Insbesondere können die Grade der benötigten Polynome F , G und H sehr groß sein. Die beste publizierte Schranke ist n -fach exponentiell. Für den Fall, dass ausschließlich Gleichheitsnebenbedingungen vorliegen („reeller Nullstellensatz“), wurde eine Verbesserung – auf dreifach exponentiell – von Lombardi und Roy angekündigt.

Unter bestimmten Restriktionen an die semialgebraische Menge K und die Polynome g_1, \dots, g_m aus (3.1) können „besser geeignete“ Formen von Positivstellensätzen angegeben werden. In Hinblick auf den Zusammenhang zur Optimierung hat sich insbesondere die im weiteren Text diskutierte Version von Putinar als sehr nützlich erwiesen. Für Polynome $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ bezeichne

$$\text{QM}(g_1, \dots, g_m) := \{s_0 + s_1 g_1 + \dots + s_m g_m : s_0, \dots, s_m \in \Sigma\}$$

den durch g_1, \dots, g_m erzeugten *quadratischen Modul*.

Satz 3.5. (Putinars Positivstellensatz [27].) *Wir nehmen an, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N - \sum X_i^2 \in \text{QM}(g_1, \dots, g_m)$ existiert. Dann ist jedes strikt positive Polynom p auf K in $\text{QM}(g_1, \dots, g_m)$ enthalten, besitzt also eine Darstellung der Form*

$$(3.3) \quad p = s_0 + s_1 g_1 + \dots + s_m g_m$$

mit $s_0, \dots, s_m \in \Sigma$.

Umgekehrt ist natürlich evident, dass jedes Polynom der Form (3.3) nichtnegativ auf K ist.

Die Darstellung aus Satz 3.5 besitzt eine sehr einfache Struktur, und sie charakterisiert (im Gegensatz zu Satz 3.4) eine Darstellung für das Polynom p selbst (anstelle beispielsweise für ein Produkt eines SOS-Polynoms mit p).

Beispiel 3.6. Die strikte Positivität in der Voraussetzung des Satzes von Putinar ist essentiell, bereits im univariaten Fall. Dies kann man etwa an dem Beispiel

$$\begin{aligned} \min & 1 - x^2 \\ \text{s.t.} & (1 - x^2)^3 \geq 0 \end{aligned}$$

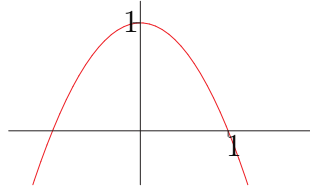


ABBILDUNG 1. Graph von $p(X) = 1 - X^2$.

sehen (siehe Abbildung 1). Die zulässige Menge K ergibt sich als das Intervall $K = [-1, 1]$, und folglich sind die Minima der Zielfunktion p an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$, jeweils mit Funktionswert 0. Die Voraussetzung des Satzes von Putinar ist wegen

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3}(X^3 - \frac{3}{2}X)^2 + \frac{4}{3}(1 - X^2)^3 = 2 - X^2$$

erfüllt. Würde nun eine Darstellung der Form (3.3) existieren, das heißt

$$(3.4) \quad 1 - X^2 = s_0(X) + s_1(X)(1 - X^2)^3 \quad \text{mit } s_0, s_1 \in \Sigma^2,$$

dann muss auch die rechte Seite von (3.4) an der Stelle $x = 1$ verschwinden. Der zweite Term hat an der Stelle 1 eine Nullstelle mindestens dritter Ordnung, so dass folglich auch s_0 an der Stelle 1 verschwindet; wegen der SOS-Eigenschaft ist diese Nullstelle von s_0 von mindestens zweiter Ordnung. Insgesamt liegt auf der rechten Seite daher an der Stelle 1 eine Nullstelle mindestens zweiter Ordnung vor, im Widerspruch zur lediglich ersten Ordnung auf der linken Seite. Es existiert also keine Darstellung der Form (3.4).

4. DUALITÄT UND DAS MOMENTENPROBLEM

Das Konzept der Dualität spielt in der Optimierung eine zentrale Rolle; geometrisch wird es hier durch die Dualität von Kegeln reflektiert. Zu einem Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ wird der duale Kegel definiert als

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ für alle } y \in K\},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt bezeichnet. Im Fall der linearen Optimierung besitzt beispielsweise der Kegel \mathbb{R}_+^n die besonders schöne Eigenschaft, *selbstdual* zu sein, das heißt $(\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_+^n$.

Da sowohl die Menge der nichtnegativen Polynome als auch die Menge der Summen von Quadraten einen Kegel bilden, ist es eine erste — und für das Nachfolgende extrem wichtige — Frage, den jeweiligen dualen Kegel zu charakterisieren. Wir betrachten hierzu zunächst den univariaten Fall mit beschränktem Grad. Sei \mathcal{P}_d der Kegel der nichtnegativen, univariaten Polynome $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $\leq d$. Ferner sei \mathcal{M}_d die positive Hülle der Vektoren $y = (y_0, \dots, y_d)$, für die ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ existiert mit $y_i = \int X^i d\mu$.

Satz 4.1. Für gerades d gilt $(\mathcal{M}_d)^* = \mathcal{P}_d$ und $(\mathcal{P}_d)^* = \text{cl } \mathcal{M}_d$, wobei cl den topologischen Abschluss einer Menge bezeichnet.

Beweis. Wir begnügen uns hier damit, die erste der beiden Gleichungen zu zeigen. Für jedes $p \in (\mathcal{M}_d)^*$ gilt nach Definition $\sum_{i=0}^d p_i y_i \geq 0$ für alle $y \in \mathcal{M}_d$. Insbesondere gilt dies auch für das Dirac-Maß δ_t , so dass $\sum_{i=0}^d p_i t^i \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $p \geq 0$.

Umgekehrt sei $p \in \mathcal{P}_d$. Für jedes $y \in \mathcal{M}_d$ existiert dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit $y_i = \int X^i d\mu$, so dass

$$p^T y = \sum_{i=0}^d p_i y_i = \int p(X) d\mu \geq 0,$$

das heißt $p \in (\mathcal{M}_d)^*$. □

Aufgrund der Gradbeschränkung in Satz 4.1 sind die Kegel Teilmengen endlich dimensionaler Vektorräume. Das Weglassen dieser Beschränkung führt auf unendlich dimensionale Vektorräume. Ein allgemeines Polynom können wir dabei mit einem Element des Folgenraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ identifizieren.

In analoger Weise zum univariaten Fall definieren die Mengen \mathcal{P} und Σ der positiven Polynome bzw. Summen von Quadraten in X_1, \dots, X_n einen Kegel. Um die dazu dualen Kegel zu finden, betrachten wir in Verallgemeinerung zum univariaten Fall Momentenfolgen der Maße auf \mathbb{R}^n . Darunter verstehen wir eine Folge $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ von reellen Zahlen, für die ein Maß μ auf \mathbb{R}^n mit $y_\alpha = \int X^\alpha d\mu$ existiert. Ein solches Maß heißt ein *repräsentierendes Maß* für y . Die Frage, ob zu einer gegebenen Folge $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ ein repräsentierendes Maß existiert, ist im Allgemeinen nicht leicht zu beantworten. Hierzu betrachten wir für jede beliebige Folge $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ die *Momentenmatrix* $(M(y))_{\mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n}$, mit

$$(M(y))_{\alpha, \beta} := y_{\alpha + \beta}.$$

Sei nun \mathcal{M} die positive Hülle der unendlichen Momentenfolgen $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$. Ferner sei \mathcal{M}_+ die positive Hülle der Folgen $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ mit positiv semidefiniter Momentenmatrix $M(y)$; für eine positiv semidefinite Matrix $M(y)$ schreiben wir auch kurz $M(y) \succeq 0$. Da für jede Momentenfolge (y_α) notwendigerweise $M(y) \succeq 0$ gilt, ergibt sich für die beiden Kegel sofort die Inklusion $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_+$. Diese Beziehung der beiden Kegel steht in dualer Beziehung zu Satz 2.1, wie die nachfolgende Verallgemeinerung von Satz 4.1 zeigt (siehe [3]); Einige Inklusionen sind unmittelbar ersichtlich (z.B. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}^*$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}^*$), einige davon sind tiefgehende Sätze (z.B. $\mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{M}$).

Satz 4.2. Die Kegel \mathcal{P} und \mathcal{M} (bzw. Σ und \mathcal{M}_+) sind dual zueinander, das heißt

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{M}, \quad \mathcal{M}^* = \mathcal{P}, \quad \Sigma^* = \mathcal{M}_+, \quad (\mathcal{M}_+)^* = \Sigma.$$

Mit dieser Dualitätsbeziehung ist ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ also genau dann nicht-negativ, wenn $\int p d\mu \geq 0$ für alle Maße μ gilt. Somit gilt genau dann $p \notin \mathcal{P}$, wenn eine Momentenfolge (y_α) mit $\sum_\alpha p_\alpha y_\alpha < 0$ existiert. Wie bereits erwähnt ist es hierbei im Allgemeinen schwierig zu entscheiden, ob eine Folge (y_α) ein repräsentierendes Maß besitzt. Unter bestimmten Voraussetzungen liefert das folgende duale Analogon des Positivstellensatzes von Putinar (3.5) eine sehr nützliche Charakterisierung. Wir betrachten hierzu

wieder die Situation zu entscheiden, ob ein Polynom p auf einer Menge K der Form (3.1) nichtnegativ ist. Es genügt, solche Maße zu betrachten, deren Trägermenge in K enthalten ist. Um diese Maße zu charakterisieren, führt man für ein gegebenes Polynom h die durch

$$(M(h * y))_{\alpha, \beta} := \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^n} h_\gamma y_{\alpha + \beta + \gamma}$$

definierte *Lokalisierungsmatrix* $M(h * y)$ ein. Zur Erläuterung dieser Matrizen betrachten wir ein Maß μ , dessen Trägermenge in $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq 0\}$ enthalten sei, mit zugehöriger Momentenfolge y . Für ein beliebiges $q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ gilt dann bezüglich des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle = \int f(X)g(X)d\mu(X)$:

$$\langle q, M(h * y)q \rangle = \int h(X)q(X)^2\mu(dX) \geq 0.$$

Unter der Voraussetzung (3.5) lässt sich nachrechnen, dass die Bedingungen an die Momenten- und die Lokalisierungsmatrizen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind. Zu einer gegebenen Folge (y_α) existiert also genau dann ein repräsentierendes Maß μ mit Trägermenge in K , wenn die semidefiniten Bedingungen

$$(4.1) \quad M(y) \succeq 0, \quad M(g_i * y) \succeq 0 \quad (1 \leq i \leq m)$$

gelten (für Details siehe z.B. [17], [29]).

5. SEMIDEFINITE OPTIMIERUNG

Wir stellen zunächst geeigneten Hintergrund zur semidefiniten Optimierung bereit, bevor wir sie dann mit positiven Polynomen verbinden. Als Ausgangspunkt soll die lineare Optimierung dienen, eins der grundlegendsten Werkzeuge der Optimierung. Bei der Untersuchung linearer Programme geht man in der Regel von einer Normalform aus, etwa von

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & \inf c^T x \\ & \text{s.t. } Ax = b, \\ & \quad x \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ist ein lineares Optimierungsproblem beispielsweise in der davon abweichenden Form $\inf\{c^T x : Ax \leq b\}$ gegeben, so kann man es leicht durch Einführung zusätzlicher Variablen in eine Normalform des Typs (5.1) überführen. Mit jedem linearen Programm (5.1) assoziiert man ein *duales Programm*

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \sup b^T y \\ & \text{s.t. } A^T y + s = c, \\ & \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Nach einem Grundresultat der Dualitätstheorie liefert ein zulässiges primal-duales Paar $(x, (y, s))$ genau dann eine Optimallösung des linearen Programms, wenn das Hadamard-Produkt $x \circ s = (x_i s_i)_{1 \leq i \leq n}$ der Nullvektor ist.

Lineare Programme können sowohl theoretisch effizient (Ellipsoid-Algorithmus; Khachiyan, 1979) als auch praktisch effizient (Simplex-Algorithmus; Dantzig 1951) gelöst

werden. Im Jahr 1984 stellte Karmarkar darüber hinaus die sogenannten *Innere-Punkte-Verfahren* vor, die ebenfalls im theoretischen Sinne (Polynomialzeit-Algorithmus) effizient sind. Seit dieser Zeit wurden diese Verfahren sehr intensiv weiterentwickelt, so dass sie mittlerweile für sehr große Probleme auch in praktischer Hinsicht mit dem Simplex-Algorithmus konkurrieren können.

Die Grundidee primal-dualer Innerer-Punkte-Verfahren kann wie folgt erläutert werden. Anstatt unmittelbar auf ein primal-duales Paar $(x, (y, s))$ mit Hadamard-Produkt 0 abzielen, betrachten wir solche primal-dualen Lösungspaare, für die gilt

$$x \circ s = \mu \mathbf{1},$$

wobei $\mathbf{1}$ der aus lauter Einsen bestehende Vektor ist. Für $\mu > 0$ wird hierdurch eine glatte, analytische Kurve von primal-dualen Lösungspaaren parametrisiert, die als *zentraler Pfad* bezeichnet wird. Für $\mu \downarrow 0$ konvergiert der zentrale Pfad gegen eine Optimallösung (x^*, y^*, s^*) des linearen Programms. Tatsächlich liegt der Grenzwertpunkt im relativen Inneren der Menge aller Optimallösungen. Die Idee Innerer-Punkte-Verfahren ist es, ausgehend von einem zulässigen primal-dualen Lösungspaar dem zentralen Pfad mittels numerischer Methoden (mit dem Newton-Verfahren als grundlegender Bestandteil) näherungsweise zu folgen. Mit dieser Technik kann ein lineares Optimierungsproblem mit rationalen Eingabedaten in $O(\sqrt{n} \log(1/\varepsilon))$ arithmetischen Schritten bis auf eine vorgegebene Genauigkeit $\varepsilon > 0$ gelöst werden. Aus diesen Schranken folgt für den Fall rationaler Eingabedaten die exakte Lösbarkeit in polynomialer Zeit.

Von einem abstrakten Standpunkt definiert die letzte Ungleichung in (5.1) einen Kegel. Lineare Programme können daher als Spezialklasse eines *konischen Optimierungsproblems*

$$(5.3) \quad \begin{aligned} & \inf c^T x \\ & \text{s.t. } Ax = b, \\ & \quad x \in K \end{aligned}$$

mit einem Kegel K aufgefasst werden. In analoger Weise zu dem linearen Programm kann man (5.3) ein duales Programm zuordnen:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} & \sup b^T y \\ & \text{s.t. } A^T y + s = c, \\ & \quad s \in K^*, \end{aligned}$$

wobei K^* den zu K dualen Kegel bezeichnet. Erfüllt K gewisse Eigenschaften (abgeschlossen, konvex, spitz, nichtleeres Inneres), dann gilt auch für das konische Optimierungsproblem ein starker Dualitätssatz (unter der technischen Voraussetzung der Existenz eines Slater-Punktes, vergleiche Bedingung (1) in Satz 3.2). Wir haben oben gesehen, dass der Kegel \mathbb{R}_+^n selbstdual ist.

Die seit den 90er Jahren sehr intensiv untersuchte *semidefinite Optimierung* ist eine Verallgemeinerung der linearen Optimierung auf matrixbasierte Variablen. Zunächst wählen wir ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$; in der Regel ist dies $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A \cdot B)$, das der Frobenius-Norm $\|A\| = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{1/2}$ zugrunde liegt. Hierdurch können lineare Bedingungen spezifiziert werden. Die Bedingung, dass x im Kegel der nichtnegativen Vektoren liegt,

ersetzen wir dadurch, dass eine symmetrische Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *positiv semidefinit* ist; auch diese Menge definiert einen selbstdualen, konvexen Kegel.

Eine Normalform eines *semidefiniten Programms (SDP)* lautet

$$\begin{aligned} & \inf \langle C, X \rangle \\ \text{s.t. } & \langle A_i, X \rangle = b_i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ & X \succeq 0 \quad (X \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ symmetrisch}). \end{aligned}$$

Diese Probleme über dem Kegel der positiv semidefiniten Matrizen sind vom Standpunkt der Optimierung *konvexe* Optimierungsprobleme. Im Jahr 1991 zeigten Nesterov und Nemirovski sowie unabhängig Alizadeh, dass die Innere-Punkte-Methoden effizient auf semidefinite Programme erweitert werden können. Tatsächlich untersuchten Nesterov und Nemirovski diesen Zusammenhang im erweiterten Kontext der konischen Optimierung; für seine Forschungsbeiträge hierzu wurde Yuri Nesterov im Jahr 2000 mit dem Dantzig-Preis ausgezeichnet, dem renommiertesten Forschungspreis in der Optimierung.² Diese Entwicklungen der numerischen Optimierung wurden u.a. forciert durch sehr erstaunliche SDP-basierte Approximationsalgorithmen von Goemans und Williamson (0.878-Approximationsalgorithmus für MAX CUT³).

In Verallgemeinerung des Innere-Punkte-Prinzips für lineare Programmierung betrachtet man bei den Innere-Punkte-Verfahren für semidefinite Programme nicht nur primal-duale Lösungspaare, deren Dualitätslücke 0 ist, sondern die Kurve all solcher Paare, die die Eigenschaft $XS = \mu \cdot I_n$ mit der Einheitsmatrix I_n und $\mu > 0$ haben.

Unsere beiden Hauptakteure

Positive Polynome und semidefinite Optimierung

kommen nun dadurch zusammen, dass die SOS-Eigenschaft eines Polynoms als semidefinites Programm formuliert werden kann. Wir betrachten hierzu ein $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vom geraden Grad $2d$. Mit Y bezeichnen wir den Vektor aller Monome in X_1, \dots, X_n vom Grad höchstens d ; Y besteht daher aus $\binom{n+d}{d}$ Komponenten. Im folgenden identifizieren wir ein Polynom $s = s(X)$ mit dem Vektor seiner Koeffizienten. Ein Polynom p ist genau dann eine Summe von Quadraten,

$$p = \sum_j (s_j(X))^2 \quad \text{mit Polynomen } s_j \text{ vom Grad höchstens } d,$$

wenn für die Koeffizientenvektoren s_j der Polynome $s_j(X)$ gilt, dass

$$p = Y^T \left(\sum_j s_j s_j^T \right) Y.$$

Nach der Cholesky-Zerlegung einer Matrix ist dies genau dann der Fall, wenn die durch $\sum_j s_j s_j^T$ definierte Matrix positiv semidefinit ist. Für das Entscheiden der SOS-Eigenschaft mittels semidefiniter Optimierung halten wir daher fest:

²A. Nemirovski hatte diesen Preis bereits 1991 für seine früheren Beiträge zur konvexen Optimierung erhalten.

³ausgezeichnet mit dem Fulkerson Prize 2000, dem renommiertesten Forschungspreis der Diskreten Mathematik.

Lemma 5.1. *Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vom Grad $2d$ ist genau dann eine Summe von Quadraten, wenn eine positiv semidefinite Matrix Q mit*

$$p = Y^T Q Y$$

existiert.

Das ist ein System in der Matrixvariablen Y der Ordnung $\binom{n+d}{d}$, mit $\binom{n+2d}{2d}$ Gleichungen; für festes d oder n ist diese Größe polynomial.

6. OPTIMIERUNG VON POLYNOMEN MITTELS SEMIDEFINITER PROGRAMME

Wir betrachten nun wieder das Ausgangsproblem (1.1) und nehmen an, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N - X_1^2 \in \text{QM}(g_1, \dots, g_m)$ existiert. Vom praktischen Standpunkt ist das kein Problem, da man einfach eine Ungleichung $\sum x_i^2 \leq N$ mit einem großen N hinzufügen kann, wodurch nur Lösungen in einer entsprechend großen Kugel um den Nullpunkt betrachtet werden. Nach Putinars Positivstellensatz folgt

$$\begin{aligned} p^* &= \sup \gamma \\ \text{s.t. } & p(X) - \gamma \in \text{QM}(g_1, \dots, g_m). \end{aligned}$$

Wie zuvor erwähnt ist der unendlich-dimensionale Kegel $\text{QM}(g_1, \dots, g_m)$ vom praktischen Standpunkt nicht leicht handzuhaben. Durch sukzessives Beschränken der Grade ersetzen wir ihn durch eine Hierarchie endlich-dimensionaler Kegel.

Sei $k_0 = \max \left\{ \lceil \frac{\deg p}{2} \rceil, \lceil \frac{\deg g_1}{2} \rceil, \dots, \lceil \frac{\deg g_m}{2} \rceil \right\}$, und für $k \geq k_0$ sei

$$\begin{aligned} a_k^* &:= \sup \gamma \\ \text{s.t. } & p - \gamma = s_0 + \sum_{j=1}^m s_j g_j, \\ & \text{wobei } s_0, \dots, s_m \in \Sigma \text{ mit} \\ & \deg(s_0), \deg(s_1 g_1), \dots, \deg(s_m g_m) \leq 2k. \end{aligned}$$

Für jedes zulässige k kann dieses Problem nach Lemma 5.1 als semidefinites Programm formuliert werden. Das duale semidefinite Programm geht aus der „abgeschnittenen“ endlichen Version des Momentenproblems (4.1) hervor,

$$\begin{aligned} b_k^* &:= \inf p^T y \\ \text{s.t. } & y_0 = 1, \\ & M_k(y) \succeq 0, \\ & M_{k - \lceil \frac{\deg g_j}{2} \rceil}(g_j * y) \succeq 0, \quad 1 \leq j \leq m, \end{aligned}$$

wobei M_k die abgeschnittenen Versionen der Lokalisierungsmatrizen sind.

Satz 6.1. (Lasserre [17].)

- (1) Für jedes zulässige k gilt $a_k^* \leq b_k^*$.
- (2) Gilt Putinars Bedingung, dann folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^* = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k^* = p^*.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der schwachen Dualität.

Für die zweite Aussage bemerken wir zunächst, dass für jedes $\varepsilon > 0$ das Polynom $p - p^* + \varepsilon$ strikt positiv auf der kompakten Menge K ist. Nach dem Positivstellensatz von Putinar besitzt $p - p^* + \varepsilon$ daher eine Darstellung der Form (3.3). Folglich existiert ein k mit $a_k^* \geq p^* - \varepsilon$. Durch einen Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ folgt die Behauptung. \square

Für $k \geq k_0$ wird daher eine Hierarchie semidefiniter Programme definiert, deren Optimalwerte monoton wachsend gegen das Optimum konvergieren. Es ist möglich, dass das Optimum bereits nach endlich vielen Schritten erreicht wird („endliche Konvergenz“). Tatsächlich ist jedoch bereits die Frage, ob ein Wert b_k^* , der in der k -ten Relaxationsstufe erhalten wurde, den Optimalwert bildet, nicht leicht zu entscheiden. Es existieren hier lediglich hinreichende Bedingungen:

Satz 6.2. (Henrion, Lasserre [12].) *Sei $k \geq k_0$, y eine Optimallösung des SDPs für b_k^* , und sei $d = \max \left\{ \left\lfloor \frac{\deg g_1}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{\deg g_m}{2} \right\rfloor \right\}$. Falls $\text{rang } M_k(y) = \text{rang } M_{k-d}(y)$, dann gilt $b_k^* = p^*$.*

Im Spezialfall von 0-1-Problemen kommt es stets zu endlicher Konvergenz.

Beispiel 6.3. Für $n \geq 2$ betrachten wir das (parametrische) Optimierungsproblem

$$(6.1) \quad \min \sum_{i=1}^{n+1} x_i^4 \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i^3 = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0$$

in den n Variablen x_1, \dots, x_n . Systeme dieser Art treten bei der Untersuchung symmetrischer Simplexe auf [5]. Um zu zeigen, dass eine Zahl α eine untere Schranke für den Optimalwert von (6.1) ist, genügt es (wegen der Kompaktheit der zulässigen Menge) die Existenz einer solchen Darstellung für $f := \sum_{i=1}^{n+1} X_i^4 - \alpha + \varepsilon$ in Hinblick auf $g_1 := \sum_{i=1}^{n+1} X_i^3$, $g_2 := -\sum_{i=1}^{n+1} X_i^3$, $g_3 := \sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 - 1$, $g_4 := -\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 + 1$, $g_5 := \sum_{i=1}^{n+1} X_i$, $g_6 := -\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ für jedes $\varepsilon > 0$ zu zeigen. Für den Fall n ungerade von (6.1) existiert eine einfache polynomiale Identität

$$(6.2) \quad \sum_{i=1}^{n+1} X_i^4 - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i^2 - 1 \right) + \sum_{i=1}^{n+1} \left(X_i^2 - \frac{1}{n+1} \right)^2,$$

die zeigt, dass das Minimum von unten durch $1/(n+1)$ beschränkt ist; und da dieser Wert durch $x_1 = \dots = x_{(n+1)/2} = -x_{(n+3)/2} = \dots = -x_{n+1} = 1/\sqrt{n+1}$ angenommen wird, ist das Minimum $1/(n+1)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ liefert das Hinzufügen von ε auf beiden Seiten von (6.2) eine Darstellung des positiven Polynoms in dem quadratischen Modul $\text{QM}(g_1, \dots, g_6)$. Für jedes ungerade n verwendet diese Darstellung nur Polynome $s_i g_i$ vom (totalen) Grad höchstens 4.

Für den Fall n gerade (mit Minimum $1/n$) sieht die Situation anders aus. Eine Computerberechnung mit der Software GLOPTIPOLY [13] zeigt, dass es bereits für $n = 4$ notwendig ist, bis zum Grad 8 zu gehen, um ein Positivstellensatz-basiertes Zertifikat der Optimalität zu erhalten.

7. AKTUELLE ENTWICKLUNGEN

Aufbauend auf den genannten Grundpfeilern existieren derzeit zahlreiche aktuelle Forschungsbestrebungen. Wir nennen hier nur einige davon: in praktisch orientierter Hinsicht die Behandlung strukturierter Systeme und die Behandlung von Symmetrien, sowie in vorwiegend theoretischer Hinsicht die Charakterisierung semidefinit darstellbarer Mengen.

7.1. Positivstellensätze für strukturierte Systeme. Wie zuvor sei K kompakt, und es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N - \|x\|^2 > 0$ auf K . Wir betrachten die folgende Modellierung dünnbesetzter Situationen. Seien $I_1, \dots, I_t \subset I := \{1, \dots, n\}$ mit $\bigcup_{k=1}^t I_k = I$. Ferner setze $\mathbb{R}[X(I_k)] := \mathbb{R}[X_i \mid i \in I_k]$.

Es sei $p \in \mathbb{R}[X(I_1)] + \dots + \mathbb{R}[X(I_t)]$, und für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ sei $g_j \in \mathbb{R}[X(I_{\alpha(j)})]$ für ein $\alpha(j) \in \{1, \dots, t\}$.

Zur effizienten Handhabung dieser Situation existieren mittlerweile interessante dünnbesetzte Positivstellensätze; diese sind für die Behandlung größerer Optimierungsprobleme sehr nützlich. Hierzu fügen wir die t redundanten quadratischen Gleichungen $g_{m+j} = M - \|X(I_j)\|^2 \geq 0$ in der Definition der zulässigen Menge K hinzu und setzen

$$\mathcal{G}_j = \{g_k : g_k \in \mathbb{R}[X(I_j)]\}, \quad 1 \leq j \leq t.$$

Satz 7.1. (Lasserre [18].) *In der beschriebenen Situation gelte für alle $k \in \{2, \dots, t\}$ die Eigenschaft*

$$(7.1) \quad I_k \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} I_j \right) \subseteq I_s \quad \text{für ein } s \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Ist $p \in \mathbb{R}[X(I_1)] + \dots + \mathbb{R}[X(I_t)]$ strikt positiv auf K , dann besitzt p eine Darstellung

$$p = \sum_{j=1}^t \left(s_{j0} + \sum_{g_k \in \mathcal{G}_j} s_{jk} g_k \right)$$

mit SOS-Polynomen $s_{jk} \in \mathbb{R}[X(I_j)]$.

Die Eigenschaft (7.1) wird als *Running Intersection Property* bezeichnet.

7.2. Symmetrien. Eine naheliegende Idee zur Verbesserung von Optimierungsalgorithmen ist die Ausnutzung von Symmetrien. Zur Illustration einer hierbei auftretenden Problematik betrachten wir den Fall der unrestringierten Optimierung. Sei $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ein unter einer Symmetriegruppe G invariantes Polynom. Ein fundamentales (in gewisser Hinsicht negatives) Resultat ist die Tatsache, dass ein G -invariantes SOS-Polynom im Allgemeinen *nicht* als Summe von Quadraten G -invarianter Polynome darstellbar ist. Es gilt hingegen die folgende Aussage aus [9], die die SOS-basierte Optimierung von Polynomen mit der klassischen Darstellungstheorie verknüpft.

Satz 7.2. *Jede G -invariante Summe von Quadraten $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ ist eine Summe von Quadraten semi-invarianter Polynome.*

Beispiel 7.3. Für die unter der symmetrischen Gruppe S_n invariante Summe von Quadraten

$$(7.2) \quad p = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)^2$$

ist jeder Summand in (7.2) semi-invariant bezüglich S_n .

Aufbauend auf diesen grundsätzlichen Überlegungen lassen sich Blockdiagonalisierungen (beispielsweise der Momentenmatrizen) der klassischen Darstellungstheorie verwenden, um die Symmetrien auszunutzen (siehe [9] für den unrestringierten Fall, [14] für den Lasserre-relaxierten restringierten Fall und [6] für den reell-algebraischen Hintergrund).

7.3. Charakterisierung semidefinit repräsentierbarer Mengen. Wie oben bereits erwähnt sind die Zulässigkeitsbereiche semidefiniter Programme konvexe, semialgebraische Mengen. Viele der Fragen im Zusammenspiel zwischen semidefiniter Optimierung und semialgebraischer Geometrie sind daher eng verknüpft mit der Frage, welche semialgebraischen Mengen *semidefinit repräsentierbar sind*, das heißt, als Zulässigkeitsbereich eines semidefiniten Programms dargestellt werden können.

Eine abgeschlossene Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein *algebraisches Inneres*, falls es ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ gibt, so dass C der Abschluss einer Zusammenhangskomponente des Positivitätsbereiches von p ist. Für ein gegebenes algebraisches Inneres C ist das C definierende Polynom p minimalen Grades bis auf eine positive Konstante eindeutig bestimmt. Helton und Vinnikov zeigten die folgende geometrische Charakterisierung [11].

Satz 7.4. *Kann eine abgeschlossene, konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ semidefinit repräsentiert werden, dann ist C starr konvex, das heißt, für jeden Punkt z im Inneren von C und jede generische Gerade ℓ durch z schneidet ℓ die reelle algebraische Hyperfläche $p(x) = 0$ vom Grad d in genau d Punkten.*

Für den Fall der Dimension 2 gilt auch die Umkehrung [11].

Satz 7.5. *Ist ein algebraisches Inneres $C \subseteq \mathbb{R}^2$ starr konvex mit einem definierenden Polynom vom Grad d , dann ist C semidefinit repräsentierbar.*

Wir illustrieren diese Aussagen an zwei Beispielen.

Beispiel 7.6. Für gegebene k Punkte $(a_1, b_1)^T, \dots, (a_k, b_k)^T \in \mathbb{R}^2$ ist die k -Ellipse mit Brennpunkten $(a_i, b_i)^T$ und Radius d die durch

$$(7.3) \quad \left\{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \sum_{i=1}^k \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2} = d \right\}$$

gegebene ebene Kurve \mathcal{E}_k (siehe Abbildung 2). Für den Spezialfall $k = 2$ ergeben sich gewöhnliche Ellipsen. Die konvexe Hülle C einer k -Ellipse \mathcal{E}_k ist eine semidefinit darstellbare Menge im \mathbb{R}^2 (siehe [21]). Um dies für das Beispiel in Abbildung 2 einzusehen, betrachtet man den Zariski-Abschluss \mathcal{E}'_3 der durch (7.3) definierten Menge; die reellen Punkte hiervon sind in der Abbildung dargestellt. Tatsächlich ist die Kurve \mathcal{E}'_3 vom Grad 8.

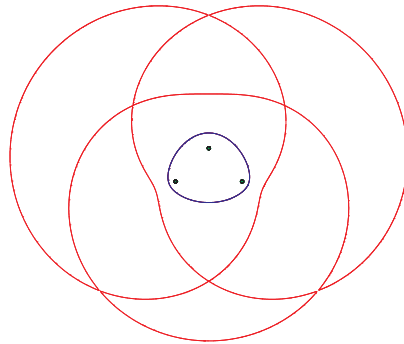


ABBILDUNG 2. Die geschlossene Kurve in der Mitte ist eine 3-Ellipse der drei dargestellten Punkte.

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt z im Inneren der 3-Ellipse, so schneidet jede generische (nicht durch einen Kurvenpunkt höherer Vielfachheit verlaufende) Gerade durch z genau 8 Punkte von \mathcal{E}'_3 . Aus dieser Eigenschaft folgt nach Satz 7.5 die semidefinite Repräsentierbarkeit.

Beispiel 7.7. Sei p das irreduzible Polynom

$$p(x, y) = x^3 - 3xy^2 - (x^2 + y^2)^2$$

(siehe Abbildung 3). Der Positivitätsbereich besteht aus den drei in der Abbildung zu sehenden beschränkten Zusammenhangskomponenten. Wir betrachten die beschränkte Komponente C in der rechten Halbebene, welche durch den topologischen Abschluss

$$\text{cl} \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : p(x, y) > 0, x > 0 \}$$

gegeben ist. Sei a ein fest gewählter Punkt im Inneren dieser Komponente, zum Beispiel $a = (1/2, 0)^T$. Es existiert eine offene Menge von Geraden durch a , die die reelle Nullstellenmenge $V_{\mathbb{R}}(p)$ nur in zwei Punkten schneiden. Daher ist C nicht semidefinit darstellbar.

Für den Fall allgemeiner Dimension ($n \geq 3$) ist bisher keine Verallgemeinerung der exakten geometrischen Charakterisierung semidefinit repräsentierbarer Mengen bekannt.

Danksagung. Wir bedanken uns für die hilfreichen Anmerkungen eines anonymen Gutachters.

LITERATUR

- [1] F. Alizadeh, J.-P. Haeberly, M. Overton. Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming. *Math. Program.* 77:111–128, 1997.
- [2] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy. *Algorithms in Real Algebraic Geometry*. Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 10, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [3] C. Berg, J.P.R. Christensen, P. Ressel. *Harmonic Analysis on Semigroups. Theory of Positive Definite and Related Functions*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [4] J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy. *Real Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [5] R. Brandenburg, T. Theobald. Radii minimal projections of polytopes and constrained optimization of symmetric polynomials. *Adv. Geom.* 6:71-83, 2006.

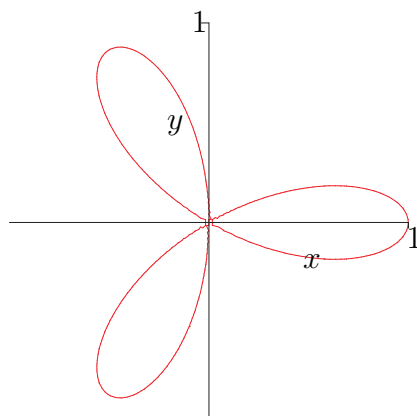


ABBILDUNG 3. Die reelle Nullstellenmenge $V_{\mathbb{R}}(p)$ des Polynoms p .

- [6] J. Cimprič, S. Kuhlmann, C. Scheiderer. Sums of squares and invariant moment problems in equivariant situations. Erscheint in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [7] D. Cox, J. Little, D. O’Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 3. Aufl., Springer-Verlag, New York, 2007.
- [8] E. De Klerk. *Aspects of Semidefinite Programming. Interior Point Algorithms and Selected Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2002.
- [9] K. Gatermann, P. Parrilo. Symmetry groups, semidefinite programs, and sums of squares. *J. Pure Appl. Algebra* 192:95–128, 2004.
- [10] M.X. Goemans. Semidefinite programming in combinatorial optimization. *Math. Prog.* 79:143–161, 1997.
- [11] J.W. Helton, V. Vinnikov. Linear matrix inequality representation of sets. *Comm. Pure Appl. Math.* 60:654–674, 2007.
- [12] D. Henrion, J.B. Lasserre. Detecting global optimality and extracting solutions in GloptiPoly. In *Positive Polynomials in Control*, 293–310, Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 312, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [13] D. Henrion, J.B. Lasserre. GloptiPoly: Global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi. *ACM Trans. Math. Soft.* 29:165–194, 2003.
- [14] L. Jansson, J.B. Lasserre, C. Riener, T. Theobald. Exploiting symmetries in SDP-relaxations for polynomial optimization. Optimization online, Report 1466, 2006.
- [15] M. Joswig, T. Theobald. *Algorithmische Geometrie. Polyedrische und Algebraische Methoden*. Vieweg-Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [16] J.-L. Krivine. Anneaux préordonnés, *J. Analyse Math.* 12:307–26, 1964.
- [17] J.B. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. *SIAM J. Optim.* 11:796–817, 2001.
- [18] J.B. Lasserre. Convergent SDP-relaxations in polynomial optimization with sparsity. *SIAM J. Opt.* 17:822–843, 2006.
- [19] M. Laurent. Moment matrices and optimization over polynomials – A survey on selected topics. Preprint, 2005.
- [20] J. Nie, K. Ranestad, B. Sturmfels. The algebraic degree of semidefinite programming. Preprint, 2006. [math.OC/0611562](https://arxiv.org/abs/math/0611562).
- [21] J Nie, P.A. Parrilo, B. Sturmfels. Semidefinite representation of the k -ellipse. Erscheint in A. Dickenstein, F. Schreyer und A. Sommese (Hrsg.): *Algorithms in Algebraic Geometry*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications.

- [22] P.A. Parrilo. Semidefinite programming relaxations for semialgebraic problems. *Math. Program.* 96B:293–320, 2003.
- [23] P.A. Parrilo, B. Sturmfels. Minimizing polynomial functions. In S. Basu und L. Gonzalez-Vega (Hrsg.), *Algorithmic and Quantitative Real Algebraic Geometry*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 60, 83–99, AMS, 2003.
- [24] G. Pataki. On the rank of extreme matrices in semidefinite programs and the multiplicity of optimal eigenvalues. *Math. of Oper. Res.* 23:339–358, 1998.
- [25] G. Pataki. The geometry of semidefinite programming. In *Handbook of Semidefinite Programming* 29–65, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000.
- [26] A. Prestel, C. Delzell. *Positive Polynomials*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [27] M. Putinar. Positive polynomials on compact semi-algebraic sets. *Indiana Univ. Math. J.* 42:969–984, 1993.
- [28] B. Reznick. Some concrete aspects of Hilbert’s 17th problem. In *Real Algebraic Geometry and Ordered Structures (Baton Rouge, LA, 1996)*, Contemp. Math., vol. 253, 251–272, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [29] M. Schweighofer. Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets. *SIAM J. Optim.* 15:805–825, 2005.
- [30] G. Stengle. A Nullstellensatz and a Positivstellensatz in semialgebraic geometry. *Math. Ann.* 207:87–97, 1974.
- [31] A. Tarski. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Univ. of California Press, Berkeley, 1951.

FB 12 – INSTITUT FÜR MATHEMATIK, J. W. GOETHE-UNIVERSITÄT, POSTFACH 111932, D–60054
FRANKFURT AM MAIN

E-mail address: riener@math.uni-frankfurt.de, theobald@math.uni-frankfurt.de