Algorithmische Geometrie: Polyedrische und algebraische Methoden

Michael Joswig and Thorsten Theobald

Vieweg-Verlag, 2008

Vorwort, Inhaltsverzeichnis und Einführung

Vorwort

Die *Geometrie* gilt als das älteste systematisierte Teilgebiet der Mathematik. Aufgrund der wachsenden Fähigkeiten von Computern nehmen algorithmische Zugänge einen immer höheren Stellenwert in der Geometrie ein. Vor diesem Hintergrund verstehen wir *Algorithmische Geometrie* in einem sehr allgemeinen Sinn als denjenigen Teil der Geometrie, der *prinzipiell* einer algorithmischen Behandlung zugänglich ist.

In dem vorliegenden Lehrbuch soll ein mathematisch orientierter, breiter Zugang zu algorithmischen Fragestellungen der Geometrie geschaffen werden. Wir weisen darauf hin, dass es sich um einen *einführenden* Text handelt. Beschränkungen sind also unabdingbar, und die Stoffauswahl ist zwangsläufig von Vorlieben der Autoren geprägt.

Im ersten Teil des Buches werden Probleme und Techniken behandelt, die sich auf polyedrische (das heißt, linear begrenzte) Objekte beziehen. Hierzu gehören beispielsweise Algorithmen zur Berechnung konvexer Hüllen und die Konstruktion von Voronoi-Diagrammen. Methoden der algorithmischen algebraischen Geometrie stehen im Zentrum des zweiten Teils. Schwerpunkte hier sind Gröbnerbasen und das Lösen polynomialer Gleichungssysteme. Der dritte Teil widmet sich schließlich ausgewählten Anwendungen aus Computergrafik, Kurvenrekonstruktion und Robotik.

Vorrangiges Anliegen ist es, Querverbindungen algorithmisch-geometrischer Fragestellungen zu anderen Teilgebieten der Mathematik (wie der algebraischen Geometrie, der Optimierung oder der Numerik) herzustellen. Hierzu konzentrieren wir uns auf einige wesentliche Ideen und Methoden. Zusätzlich wollen wir einen Einblick in die Möglichkeiten aktueller Computersoftware (wie `polymake`, `Maple` oder `Singular`) in diesem Kontext geben.

Erwartete Vorkenntnisse

Das Buch richtet sich an fortgeschrittene Studierende in den Bachelor-Studiengängen Mathematik und Informatik sowie an Studierende der Ingenieurwissenschaften, die sich für Anwendungen der algorithmischen Geometrie (etwa in der Robotik) interessieren.

Vorausgesetzt wird der gängige Stoff der Anfangssemester aus der linearen Algebra und der Analysis. Zusätzliche Kenntnisse in diskreter Mathematik, Optimierung, Algorithmen und Algebra sind hilfreich; das aus diesen Bereichen benötigte Material wird aber im Text hergeleitet oder in den Anhängen zusammengestellt.

Zielsetzung des Buches

Es ist nicht beabsichtigt, alle Teilaspekte umfassend zu behandeln. Stattdessen sollen – ausgehend von algorithmischen Fragestellungen in verschiedenen aktuellen Teilbereichen der Geometrie – vielfältige Einstiegsmöglichkeiten in die (meist englischsprachige) Spezialliteratur geschaffen werden.

Im Gegensatz zu aus der Informatik hervorgegangen Büchern zum selben Thema wird der für effiziente Implementierungen oftmals wichtige Aspekt der abstrakten Datentypen nur am Rande behandelt.

Danksagung

Dieses Buch ist aus Vorlesungen der Autoren an der Technischen Universität Berlin, der Technischen Universität Darmstadt und der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main hervorgegangen. Die Hörer dieser Veranstaltungen haben uns zahlreiche Anregungen gegeben.

Einige Bilder wurden uns freundlicherweise von Sven Herrmann (Abbildung 13.3) und Nikolaus Witte (Abbildung 1.1) zur Verfügung gestellt. Christoph Eyrich hat uns wertvolle Hilfe bei der Gestaltung gegeben.

Für Kommentare und Kritik bedanken wir uns ganz besonders bei René Brandenberg, Peter Gritzmann, Martin Henk, Sven Herrmann, Katja Kulas, Alexander Martin, Werner Nickel, Marc Pfetsch, Cordian Riener, Thilo Rörig, Moritz Schmitt, Achill Schürmann, Dieter Schuster, Reinhard Steffens, Natascha Steinbrügge, Tanja Treffinger, Axel Werner, Claudia Wessling, Nikolaus Witte, Ronald Wotzlaw und Günter M. Ziegler.

Darmstadt und Frankfurt am Main,
im August 2007

Michael Joswig
Thorsten Theobald

Inhalt

IV Anhänge

1 Einführung und Überblick

In methodischer Hinsicht betrachten wir in diesem Buch die Geometrie von einem *analytischen*, also koordinatenbasierten Standpunkt aus. Dieser Zugang macht die Frage nach der Darstellung der geometrischen Daten im Rechner zumeist sehr einfach. Hierbei wollen wir uns nicht auf lineare Probleme beschränken. Dieses Vorgehen ist zum einen vom theoretischen Standpunkt aus reizvoll, zum anderen aber auch praktisch motiviert durch Fortschritte in der Computeralgebra und durch die Verfügbarkeit schneller Hardware.

In Kapitel 2 stellen wir einige Grundlagen bereit. Zunächst einmal bietet sich für viele geometrische Anwendungen die Sprache der *projektiven Geometrie* an. Da diese oft nicht mehr zum Standardrepertoire der Grundvorlesungen gehört, diskutieren wir kurz die benötigten Konzepte projektiver Räume und projektiver Transformationen. Darüber hinaus wird in dem Kapitel in den *Konvexitätsbegriff* eingeführt.

Aus dem analytischen Zugang ergibt sich eine Organisation des Textes entlang der Fragestellung nach Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen und ihren Varianten steigender Komplexität in Bezug auf das notwendige mathematische Rüstzeug.

1.1 Lineare algorithmische Geometrie

Der zentrale Grundbaustein der meisten vorgestellten Algorithmen ist das *Gauß-sche Eliminationsverfahren*. Dieses ist Gegenstand jeder Vorlesung über *lineare Algebra*. In geometrischer Sprechweise behandelt der Algorithmus die folgende Fragestellung: Zu gegebenen affinen Hyperebenen $H_1, \dots, H_k$ im Vektorraum K^n über einem beliebigen Körper K sei

$$A = H_1 \cap \cdots \cap H_k . \tag{1.1}$$

Je nach Variante wird von A als Ausgabe eine (affine) Basis oder nur die Dimension verlangt.

Unser Streifzug durch die eigentliche algorithmische Geometrie beginnt mit den reellen Zahlen und dem Übergang von Gleichungen zu Ungleichungen. Betrach-

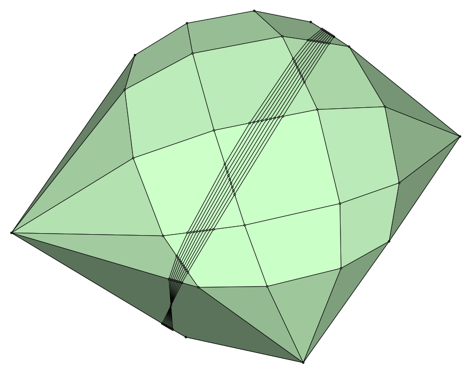

Abbildung 1.1. Beispiel für ein beschränktes Polyeder in $\mathbb{R}^3$. Hierbei handelt es sich um ein Polytop, das dual zu einem Zonotop ist. In dem gürtelartigen Streifen in der Mitte liegen sehr viele sehr schmale Facetten.

tet man zu jeder Hyperebene

$$H_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \right\}$$

den abgeschlossenen Halbraum

$$H_i^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \right\} ,$$

dann definiert der Durchschnitt $P = \bigcap_{i=1}^{k} H_i^+$ ein *(konvexes) Polyeder* (siehe Abbildung 1.1 für ein Beispiel in $\mathbb{R}^3$).

Polyeder bilden ein geometrisches Grundkonzept für die algorithmische Geometrie und die lineare Optimierung. In hohen Dimensionen ist die kombinatorische Vielfalt von Polyedern erheblich größer als sich durch niedrigdimensionale Visualisierungen wie in Abbildung 1.1 erahnen lässt. Eine für die Komplexität vieler Algorithmen grundlegende Frage ist, wie viele Ecken ein durch k lineare Ungleichungen definiertes Polyeder maximal haben kann. Dieser Sachverhalt wurde erst im Jahr 1970 durch das *Upper-Bound-Theorem* geklärt, dessen Beweis (in einer etwas abgeschwächten Version, siehe Satz 3.44) und die Klärung der zugrunde liegenden geometrischen Struktur ein erstes Etappenziel des Buches ist. Für die algorithmische Geometrie ist das Resultat von besonderer Bedeutung, weil sich hieraus Komplexitätsabschätzungen für einige Verfahren ergeben.

In Kapitel 3 studieren wir systematisch Eigenschaften von Polytopen (Seitenverband, Polarität, Kombinatorik von Polytopen) bis hin zur *Euler-Formel* und den *Dehn-Sommerville-Gleichungen*. Am Ende des Kapitels illustrieren und visualisieren wir einige der Überlegungen mit der Geometrie-Software `polymake`. Diese wird auch in späteren Kapiteln zur Verdeutlichung der vorgestellten Algorithmen verwendet.

Kernstück vieler mathematischer Anwendungen ist die *lineare Optimierung*. Hierbei soll auf einem (durch lineare Ungleichungen gegebenen) Polyeder P das Minimum (bzw. Maximum) bezüglich einer linearen Zielfunktion bestimmt werden. Für algorithmische Lösungen ist zudem zu beachten, dass das Polyeder leer sein kann, oder die Zielfunktion auf P unbeschränkt. In Kapitel 4 geben wir eine kompakte Einführung in die relevanten Aspekte der linearen Optimierung. Insbesondere diskutieren wir den sowohl theoretisch als auch praktisch wichtigen *Simplex-Algorithmus*. Dabei betonen wir – unserem Thema entsprechend – die geometrische Sichtweise.

Ein interessantes algorithmisches Problem der Polyedertheorie besteht darin, *alle* Ecken eines durch Ungleichungen gegebenen Polyeders aufzuzählen. Mittels der in Abschnitt 3.3 erläuterten Dualitätstheorie ist das äquivalent zur Bestimmung eines minimalen Ungleichungssystems der konvexen Hülle einer Punktmenge. Dem *Konvexe-Hülle-Problem* widmen wir uns in Kapitel 5. Für Anwendungen ist hierbei zu beachten, dass dieses Problem (allein schon aufgrund der nach dem Upper-Bound-Theorem möglicherweise großen Ausgabe) in höheren Dimensionen praktisch schwierig wird. Von allgemeiner Bedeutung für den Entwurf effizienter Algorithmen ist das Prinzip *Divide-and-Conquer* („Teile und herrsche"), das wir anhand der Berechnung ebener konvexer Hüllen vorstellen.

Im nächsten Schritt untersuchen wir *Voronoi-Diagramme* und die dazu dualen *Delone-Zerlegungen*. Zu einer gegebenen Punktmenge $S = \{s^{(1)}, \ldots, s^{(m)}\}$ im n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ besteht die zu einem Punkt $s^{(i)}$ gehörige *Voronoi-Region* aus denjenigen Punkten im $\mathbb{R}^n$, die (bezüglich des euklidischen Abstands) vom Punkt $s^{(i)}$ höchstens so weit entfernt sind wie von allen anderen.

In Kapitel 6 zeigen wir zunächst, wie sich aus Konvexe-Hülle-Algorithmen unmittelbar Verfahren zur Berechnung von Voronoi-Diagrammen in beliebiger Dimension gewinnen lassen. Anschließend konzentrieren wir uns wieder auf den ebenen Fall und stellen den *Wellenfront-Algorithmus* vor. Hierzu sind Kenntnisse über abstrakte Datentypen von Vorteil. Die wichtigsten Prinzipien werden wir erläutern; für eine tiefergehende Diskussion einschlägiger Datenstrukturen wird der Leser allerdings auf die weiterführende Literatur verwiesen.

Voronoi-Diagramme dienen beispielsweise dazu, das sogenannte *Postamt-Problem*, eine klassische Anwendung der algorithmischen Geometrie, zu lösen. Hierbei soll zu einer gegebenen endlichen Punktmenge $S \subseteq \mathbb{R}^2$ für jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ effizient derjenige Punkt $s \in S$ bestimmt werden, der den euklidischen Abstand $\|p - s\|$ minimiert. Die Punkte aus S kann man sich als Postämter vorstellen, während die Punkte p die Kunden sind. Natürlich gibt es hierzu eine naive algorithmische Lösung mittels vollständigen Ausprobierens (die auch sinnvoll ist, wenn man nur einen einzigen Kunden in Betracht zieht). Man soll sich das Problem aber so vorstellen, als ob die Post ein Auskunftssystem erstellen wolle, das dann für sehr viele Kunden zu schnellen Antworten kommt, sofern sich die Positionen der Postämter nicht ändern.

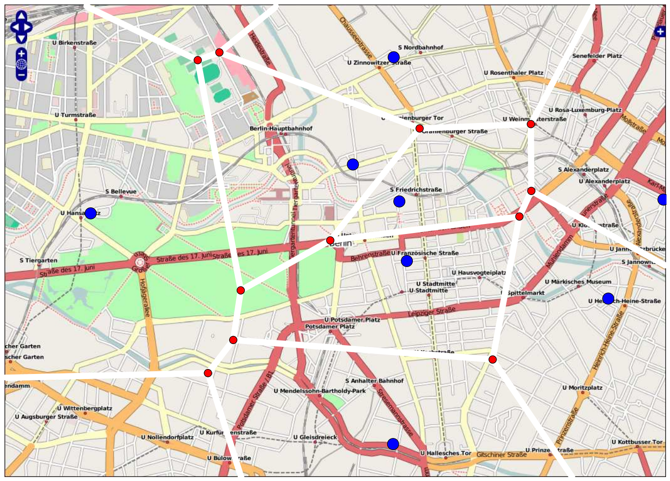

Abbildung 1.2. Lösung für ein Postamt-Problem für zehn Filialen der Deutschen Post AG in Berlin (zwei davon außerhalb des Kartenausschnitts). Karte von `www.openstreetmap.org`.

Bei vielen Anwendungen treten Voronoi-Diagramme in dualer Form auf. In Kapitel 7 untersuchen wir daher Delone-Zerlegungen. Die hierdurch definierten Unterteilungen bzw. Triangulierungen (der konvexen Hülle) einer gegebenen Punktmenge S sind in mehrfacher Hinsicht optimal unter allen Triangulierungen von S. Wir zeigen, dass in beliebiger Dimension der maximale Umkugelradius minimiert wird. Auch hier gehen wir speziell auf den planaren Fall ein.

1.2 Nichtlineare algorithmische Geometrie

Der zweite Teil des Buches widmet sich nichtlinearen Problemen. Wenn wir zu unserer Systematik der Gleichungssysteme zurückkehren, dann machen wir in Kapitel 8 den Schritt von den linearen Gleichungs- und Ungleichungssystemen zu polynomialen Gleichungssystemen, also hinein in die elementare algebraische Geometrie. Es wäre zweifellos konsequent, anschließend polynomiale Ungleichungssysteme, also die semi-algebraische Geometrie, zu behandeln; dies würde aber den gesteckten Rahmen sprengen. Wir begnügen uns mit Hinweisen zu polynomialen Ungleichungen an den entsprechenden Stellen.

Als anschauliches Beispiel für ein nichtlineares Problem führe man sich etwa das *Kreisproblem des Apollonius von Perga* (ca. 260–190 v. Chr.) vor Augen: Bestimme einen Kreis, der drei gegebene Kreise C_1, C_2, C_3 in der Ebene tangential berührt (siehe Abbildung 1.3). Befinden sich die Kreise C_1, C_2 und C_3 in allgemeiner Lage, dann existieren im Allgemeinen acht (eventuell komplexe) Lösungen. In einer Anwendung können die Kreise etwa für Abstandsbedingungen von gegebenen Punkten stehen; wir kommen weiter unten darauf zurück.

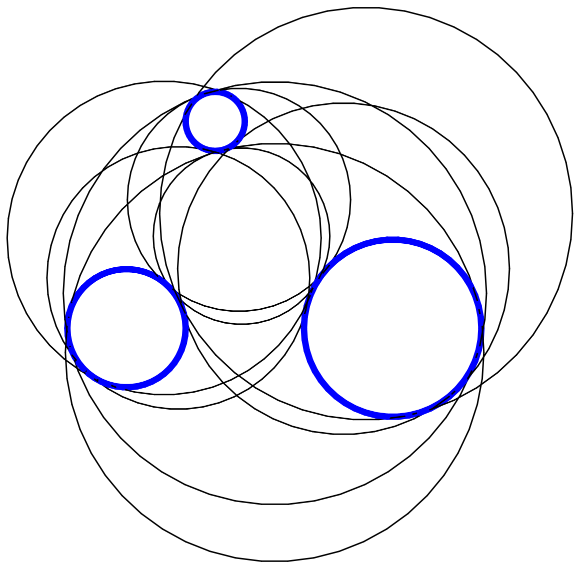

Abbildung 1.3. Acht (Apollonius-)Kreise, die drei gegebene Kreise berühren.

Der algorithmische Schwerpunkt im zweiten Teil des Buches liegt auf *Gröbnerbasen* (Kapitel 9). Diese erlauben es, beliebige polynomiale Gleichungssysteme symbolisch zu lösen (Kapitel 10).

In Kapitel 8 stellen wir Grundlagen zusammen zu Resultanten, zu ebenen affinen und projektiven algebraischen Kurven sowie zum Satz von Bézout. Wir schließen das Kapitel, indem wir einige der Sachverhalte im mathematischen Softwaresystem `Maple` illustrieren.

Ein zentrales algorithmisches Problem, das in Kapitel 9 behandelt wird und auf dem die später diskutierten Methoden zur Lösung polynomialer Gleichungssysteme beruhen, ist das *Ideal-Zugehörigkeitsproblem*. Für ein Polynom f aus dem Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper K sowie $g_1, \ldots, g_r \in K[x_1, \ldots, x_n]$ soll entschieden werden, ob f in dem durch $g_1, \ldots, g_r$ erzeugten Ideal enthalten ist. Die Tatsache, dass diese Frage im allgemeinen Fall nicht direkt entschieden werden kann, motiviert das Studium von Idealbasen mit speziellen Eigenschaften, den Gröbnerbasen, für die das algorithmische Entscheidungsproblem dann einfach wird. Hauptaufgabe ist es nun, für ein gegebenes Polynomideal zunächst einmal eine Gröbnerbasis zu berechnen. Entlang dieser Frage entwickeln wir auch die relevante Theorie der algorithmischen Algebra.

In Kapitel 10 diskutieren wir, wie Gröbnerbasen zur algorithmischen Lösung polynomialer Gleichungssysteme verwendet werden können. Hierzu geben wir zunächst eine Einführung in das Computeralgebra-System `Singular`. Von theoretischer Seite ist der Hilbertsche Nullstellensatz von Bedeutung, der einen fundamentalen Zusammenhang zwischen *Geometrie* (im Sinne der Nullstellenmengen von Polynomen) und *Algebra* (im Sinne von Polynomidealen) herstellt. Durch Variablenelimination und Eliminationsideale können die Lösungen der polynomialen Gleichungssysteme dann auf die Nullstellen univariater Polynome zurückgeführt werden. Zum Abschluss des Kapitels präsentieren wir den einfachsten Fall des *Conti-Traverso-Algorithmus*, der aufzeigt, wie Gröbnerbasistechniken bei der Untersuchung ganzzahliger linearer Programme eingesetzt werden können.

1.3 Anwendungen

Im dritten Teil des Buches diskutieren wir einige ausgewählte Anwendungen der behandelten Theorie.

In Kapitel 11 betrachten wir das Problem, aus einer Schar von Punkten auf einer Kurve selbige zu rekonstruieren. Um das Verhältnis zwischen der (unbekannten) Kurve und den (gegebenen) Punkten zu bewerten, verwenden wir die Konzepte der medialen Achse sowie der lokalen Detailgröße („local feature size"). Für diese Anwendung reichen die Kenntnisse aus dem ersten Teil des Buches aus.

In Kapitel 12 behandeln wir Geraden im 3- und n-dimensionalen Raum. Geraden im 3-dimensionalen Raum treten häufig in der algorithmischen Geometrie und der Computergrafik auf, beispielsweise bei Sichtbarkeitsproblemen. Obwohl eine (affine) Gerade im $\mathbb{R}^3$ mengentheoretisch ein polyedrisches Objekt ist, sind beispielsweise Schnittbedingungen von Geraden mit Geraden inhärent nichtlinear. Wir untersuchen diese geometrischen Sachverhalte, indem wir algebraische Eigenschaften der *Plücker-Koordinaten* (bzw. Grassmann-Koordinaten) einer Geraden studieren. Wir schließen das Kapitel mit einem Beispiel, das zeigt, welche Rolle Konfigurationen 3-dimensionaler Geraden in der Computergrafik spielen.

Im abschließenden Kapitel 13 geben wir noch einen kleinen Einblick in einige Anwendungen zum *Global Positioning Systems (GPS)* sowie zur Robotik. Das zur Standortbestimmung dienliche GPS beruht auf mehreren Satelliten, die kontinuierlich die Erde so umkreisen, dass von (fast) jeder Stelle auf der Erde mindestens vier Satelliten erreichbar sind. Wie wir in Kapitel 13 sehen werden, ist die Positionsbestimmung mit GPS eng verbunden mit einer dreidimensionalen Version des Apollonius-Problems. Darüber hinaus diskutieren wir, auch mithilfe des Computers, einige grundlegende Probleme der Kinematik.

1.4 Anhänge

In drei der vier Anhänge werden Grundlagen zu algebraischen Strukturen, konvexer Analysis sowie Algorithmen und Komplexität zusammengestellt. Diese dienen auch zur Festlegung der Notation. Der vierte Anhang stellt kurz vier verwendete Softwarepakete vor: `polymake`, `Maple`, `Singular` und `CGAL`.

Zur Organisation des Textes

Das Buch umfasst mehr Material, als sich in einer einsemestrigen vierstündigen Vorlesung (Modul) abhandeln lässt. Das bedeutet, dass sich dieses Buch für unterschiedlich gestaltete Vorlesungen eignet. Die folgenden Varianten sind als Vorschläge zu verstehen:

- „Lineare algorithmische Geometrie“: Kapitel 2 bis 7, Kapitel 11 und 12. Hierbei ist zu beachten, dass das Kapitel 12 auch die Eliminationstechniken aus Teil II des Buches verwendet. Die Nutzung von `Maple` oder `Singular` erlaubt aber das Ausrechnen einzelner Beispiele, ohne die Theorie im Detail behandeln zu müssen.
- „Nichtlineare algorithmische Geometrie“: Dies ist komplementär zur vorigen Auswahl, besteht also aus den Kapiteln 8 bis 10 des zweiten Teils und dem Anwendungskapitel 13. Vom Umfang her eignet sich dieser Stoff für eine zweistündige Veranstaltung, die sich an eine „Lineare algorithmische Geometrie“ anschließen könnte.
- „Querschnitt polyedrischer und algebraischer Methoden“: Kapitel 2, 3, 5 oder 6, 8 bis 10, 12, 13. Dabei können die Abschnitte 9.5 und 10.6 ausgelassen werden.

Jedes Kapitel endet mit einem kurzen Abschnitt „Anmerkungen“, in dem auf Historisches und Vertiefendes, vor allem aber auch auf weiterführende Literatur aufmerksam gemacht wird. Die Abbildungen wurden außer mit den genannten Programmen mit METAPOST erstellt [56].