Affine anabelsche Kurven in positiver Charakteristik

Diplomarbeit
von
Jakob Stix

betreut von
Professor Dr. Florian Pop
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Februar 2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die anabelsche Geometrie versucht, gewisse Kategorien von Schemata anhand des Funktors der étalen Fundamentalgruppe ausschließlich gruppentheoretisch zu beschreiben. Von der Existenz nichttrivialer „anabelscher“ Kategorien spricht die anabelsche Grothendieck-Vermutung [Gr83, Gr84].

Eine birationale Variante derselben, die Behandlung endlich erzeugter Körper, wurde zu Beginn der 90er Jahre durch F. Pop [Pop90, Pop94, Pop95] bewiesen. Bald darauf wurden auch anabelsche Kategorien von Kurven beschrieben. In [Tam97] behandelt A. Tamagawa affine hyperbolische Kurven über endlich erzeugten Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ zusammen mit ihren Isomorphismen. Dies nährte den Verdacht einer engen Beziehung zwischen endlicher Erzeugtheit und der Eigenschaft, anabelsch zu sein. Dem allerdings widerspricht das bisher allgemeinste Resultat durch S. Mochizuki [Mz96, Mz96'], welches hyperbolische Kurven über Unterkörpern von p-adischen Körpern mit dominanten Morphismen als anabelsch nachweist; siehe auch [Fa98]. In beiden Fällen war die Charakterisierung von Kurven über endlichen Körpern durch ihre zahme Fundamentalgruppe grundlegend.

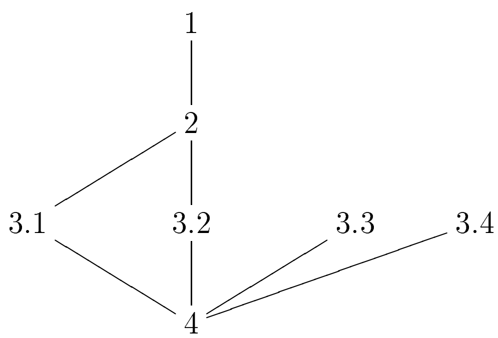
Die vorliegende Arbeit widmet sich einer Verallgemeinerung des Resultats von A. Tamagawa auf den Fall positiver Charakteristik und zahmer Fundamentalgruppe. Die Methode erlaubt jedoch auch eine Beweisvariante des Problems in Charakteristik 0.

Die entscheidende Idee nutzt aus, daß sich Isomorphismen von Kurven und Gleichheit der klassifizierenden Abbildungen in einen *feinen* Modulraum entsprechen. Man dehnt Kurven zu Familien über Schemata vom endlichen Typ über $\mathbb{Z}$ aus und stellt fest, daß Spezialisierung und das Resultat über endlichen Körpern die topologische Komponente der klassifizierenden Abbildung nun festlegen. Leider ist dies eine zutiefst unschematheoretische Eigenschaft, welche jedoch durch den Satz 3.3.2 über „topologisch gleiche Morphismen“ eine einfache Behandlung erfährt und schließlich zum Erfolg führt.

Die algebraische Fundamentalgruppe sitzt in einer kurzen exakten Sequenz als Erweiterung eines arithmetischen Teils durch einen geometrischen. Für die Konstruktion einer Garbenstruktur auf den Morphismenmengen zu allen Konstantenkörpererweiterungen benutzt Abschnitt 1.3 essentiell die Zentralfreiheit des geometrischen Teils, die für hyperbolische Kurven gegeben ist. Man erhält damit eine hypothetische vage Beschreibung einer anabelschen pro-endlichen Gruppe als „geometrisch zentralfrei mit hinreichend komplizierter arithmetischer Operation“ derart, daß auch alle „étalen Überlagerungen“ diese Eigenschaft teilen.

In Kapitel 1 wird der Fundamentalgruppenfunktor wiederholt und die gruppentheoretische Seite des Problems beschrieben. Im Zentrum von Kapitel 2 steht das Theorem über die topologische Invarianz der Fundamentalgruppe. Diese kann somit nicht zwischen einer Kurve und ihrem Frobeniustwist unterscheiden, denn beide werden durch den relativen Frobenius, einen universellen Homöomorphismus, verbunden. Durch das Lokalisieren an solchen Morphismen entsteht eine neue geometrische Kategorie. Das Kapitel 3 enthält Vorarbeiten zum eigentlichen Beweis, welche sich gut in vier unabhängige Abschnitte gliedern ließen: eine Erinnerung an die für die Arbeit relevanten Ergebnisse Tamagawas aus [Tam97], die Beschreibung von Levelstrukturen auf π_1^{tame}, um einen feinen Modulraum nutzen zu können, des weiteren das Resultat über „topologisch gleiche Morphismen“ und abschließend spezielle Überlegungen, welche zu Reduktionsschritten führen. Das Kapitel 4 ist mit der Durchführung des Beweises ausreichend beschäftigt.

Leitfaden



Danksagung.

Ich danke sehr herzlich Prof. Florian Pop für die gelungene Auswahl des Themas und die mannigfache Unterstützung. Eike Lau gilt mein Dank für aufschlußreiche Diskussionen und die kritische Durchsicht dieser Arbeit.

Bei meinen Eltern, Gisela und Michael Stix, bedanke ich mich für den Rückhalt, dessen ich mir sicher sein durfte und darf. Schließlich gebührt meiner Freundin Sabine Lange mein innigster Dank dafür, daß sie da war und ist, besonders wenn es einmal nicht funktionieren wollte.

Bonn, den 7. Februar 2000

Notationen

Es bezeichne k stets einen Körper, k^{sep} einen separablen und $\overline{k}$ einen algebraischen Abschluß desselben. Seine absolute Galoisgruppe sei $G_k = \mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$, sowie $G(l/k)$ die einer Galoiserweiterung l/k. Zum Zweck einer kurzen Notation sei Sch die Kategorie der zusammenhängenden Schemata.

Unter einer glatten Kurve über einer Basis T verstehe man eine glatte eigentliche Abbildung $X \to T$ mit geometrisch irreduziblen Fasern der Dimension 1 zusammen mit einem relativ étalen effektiven Divisor D, den Punkten im unendlichen. Die Notation hierfür sei $C = (X, D)/T$, wobei C auch für das Komplement $X \setminus D$ steht. Das geometrische Geschlecht der Fasern ist eine lokal konstante Funktion auf T und wird mit g bezeichnet. Sei $r = \deg(D)$, dann nennt man das Paar (g, r) den Typ der Kurve. Gilt $r > 0$, so heiße sie affin, bei negativer Eulercharakteristik $\chi_C = 2 - 2g - r$ nennt man sie hyperbolisch.

Auf der Homomorphismenmenge zweier Gruppen operieren diese durch Verkettung mit inneren Automorphismen. Die Äquivalenzklassen unter dieser Operation heißen äußere Morphismen und werden mit Hom^{out} bezeichnet, die Isomorphismen darin erhalten den Namen Isom^{out}. Die Konstruktion ist verträglich mit Komposition und führt zur Kategorie der Gruppen mit äußeren Morphismen. Hat man es mit pro-endlichen Gruppen zu tun, betrachtet man nur stetige Morphismen und erhält analog die Kategorie $\mathcal{G}^{ext}$ der pro-endlichen Gruppen mit äusseren Morphismen.

Definiert man in einer Gruppe G eine neue Multiplikation durch Anwendung der vorhandenen auf die Faktoren in umgekehrter Reihenfolge, so entsteht die opponierte Gruppe G^{op}.

Sei l eine Primzahl. Dann bezeichne G^l die pro-l-Komplettierung einer Gruppe G, im Fall einer pro-endlichen Gruppe entspricht sie dem maximalen pro-l-Quotienten.

Kapitel 1

Die étale Fundamentalgruppe

Als Quelle dieses Abschnitts sei auf [SGA 1, Exp. V] aber auch zur „Elimination überflüssiger noethersch-Hypothesen“ auf [SGA 1, Exp.IX] verwiesen.

1.1 Definition

Will man das Konzept der Fundamentalgruppe, welches in der Topologie so nützlich ist, auf Schemata übertragen, so steht man vor dem Problem, daß Wege in der algebraischen Situation nicht zur Verfügung stehen. Statt dessen nutzt man die Beobachtung, daß π_1^{top} die Überlagerungen eines topologischen Raumes klassifiziert.

Definition. *Eine endliche, étale und surjektive Abbildung $Y \to X$ heißt étale Überlagerung von X, und Rev_X sei die Tensorkategorie derselben. Eine Überlagerung $Y \to X$ heißt zusammenhängend, falls Y zusammenhängend ist.*

Analog zur Situation in der Topologie besitzt man die wichtige

Proposition 1.1.1 (Eindeutigkeit von Lifts). *Sei Ω ein Körper und Z ein zusammenhängendes Schema. Für eine étale Überlagerung $Y \to X$, eine Abbildung $Z \to X$ und Punkte z, y in $Z(\Omega), Y(\Omega)$ gibt es höchstens einen Lift $Z \to Y$, der z nach y abbildet:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, "y"] \arrow[d, "z"'] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists^{\leq 1}"] & X \end{tikzcd}$$

Beweis: Die Diagonale $\Delta : Y \to Y \times_X Y$ ist gemäß [SGA 1, I Prop 3.1] eine offene Immersion, somit offen und abgeschlossen. Angenommen es gäbe zwei Lifts, so bildete deren Produkt $Z \to Y \times_X Y$ den Punkt z in das Bild der Diagonale ab, folglich das ganze zusammenhängende Z. □

In der Topologie gibt es Schwierigkeiten mit der Funktorialität der Fundamentalgruppe als Funktor von topologischen Räumen. Man sieht sich gezwungen, den Basispunkt der Konstruktion mit Wegen als Teil der Struktur mit aufzunehmen oder andernfalls im Fundamentalgruppoid alle Wahlen gleichzeitig zu betrachten.

Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper Ω ist Rev_Ω kanonisch äquivalent zur Kategorie der endlichen Mengen.

Definition (SGA I, V §7). *Unter einem Basispunkt eines Schemas X versteht man einen algebraisch abgeschlossenen Köper Ω und eine Abbildung*

$$\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$$

zusammen mit dem induzierten Faserfunktor

$$F_{\bar{x}} : \mathrm{Rev}_X \to \mathcal{S}et \ ,$$

welcher Y/X auf $Y \times_X \mathrm{Spec}(\Omega)$ abbildet, der Faser über $\bar{x}$. Der Faserfunktor $F_{\bar{x}}$ werde sinngemäß auf pro-étale Schemata über X ausgeweitet und nimmt dann Werte in pro-endlichen Mengen an.

Ab jetzt seien alle Basisschemata X zusammenhängend.

Korollar (Eindeutigkeit von Lifts). *Sei $Y \to X$ étale zusammenhängende Überlagerung und F ein Faserfunktor. Dann operiert $\mathrm{Aut}_X(Y)$ frei auf $F(Y)$.* □

Definition. *Eine zusammenhängende étale Überlagerung Y/X heißt galoissch, falls $\mathrm{Aut}_X(Y)$ für einen beliebigen Faserfunktor F (äquivalent dazu für alle) frei und transitiv auf $F(Y)$ operiert.*

Diese Definition erweist sich als sinnvoll, wenn man die Eindeutigkeit von Lifts mit $\#F(Y) = \deg(Y \to X) < \infty$ verknüpft.

Proposition 1.1.2. *Galoissche Überlagerungen sind cofinal im System aller zusammenhängenden étalen Überlagerungen.*

Beweis: [SGA 1, V §4 g] □

Definition. *Sei X ein zusammenhängendes Schema. Eine universelle Überlagerung $\hat{X}$ von X ist ein zusammenhängendes Schema mit einem pro-étalen Morphismus $\hat{X} \to X$, welcher ein projektiver Limes étaler Überlagerungen von X ist und Lifts in jede étale Überlagerung von X besitzt. Genauer: für einen Körper Ω, eine étale Überlagerung $Y \to X$ und Punkte $\hat{x}, y$ aus $\hat{X}(\Omega), Y(\Omega)$, welche in $X(\Omega)$ übereinstimmen, existiert stets ein Lift $\hat{X} \to Y$, der $\hat{x}$ nach y abbildet.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\Omega) \arrow[r, "y"] \arrow[d, "\hat{x}"'] & Y \arrow[d] \\ \hat{X} \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists!"] & X \end{tikzcd}$$

Proposition 1.1.3. *Universelle Überlagerungen zusammenhängender Schemata existieren. Für ein Schema X bezeichnen wir sie mit $\hat{X}$.*

Beweis: Man wähle einen Basispunkt $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ und markiere in jedem $Y/X \in \mathrm{Rev}_X$ einen Punkt aus $F_{\bar{x}}(Y)$. Definiere

$$\hat{X} = \varprojlim Y$$

wobei das projektive System über alle Morphismen zwischen zusammenhängenden Objekten aus Rev_X läuft, welche die ausgewählten Punkte respektieren. Der Limes existiert, da alle Morphismen affin sind, das System zwischen zwei Objekten nur maximal einen Morphismus kennt und die Isomorphieklassen von Objekten in Rev_X eine Menge bilden.

Die Existenz von Lifts muß nur für galoissche Y/X nachgewiesen werden, dort existiert aber nach Konstruktion eine Surjektion $\hat{X} \to Y$. Den Rest erledigt die auf den Fasern $F_{\bar{x}}(Y)$ transitiv operierende Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_X(Y)$. □

Proposition 1.1.4. *Für eine Abbildungen $f : X \to Z$ zusammenhängender Schemata gibt es nach Auswahl eines Basispunktes $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ und eines $\xi \in F_{\bar{x}}(\hat{X})$ eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \textit{Lifts} \quad \hat{f} : \hat{X} \to \hat{Z} \quad \textit{von } f \right\} & \xrightarrow{\sim} & F_{f(\bar{x})}(\hat{Z}) \\ \hat{f} & \mapsto & \hat{f}(\xi) \end{array}$$

Beweis: Es ist nur die Surjektivität zu zeigen, denn Proposition 1.1.1 gilt auch für pro-étale Überlagerungen. Sei η ein Punkt von $\hat{Z}$ aus der Faser über $f(\bar{x})$. Es ist $\hat{Z} = \varprojlim Z'$ pro-étale, η entspricht einem kompatiblen System mit η bezeichneter Punkte der Z'. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_Z\left((\hat{X},\xi),(\hat{Z},\eta)\right) &= \varprojlim \ \mathrm{Hom}_Z\left((\hat{X},\xi),(Z',\eta)\right) \\ &= \varprojlim \ \mathrm{Hom}_X\left((\hat{X},\xi),(X \times_Z Z', \bar{x} \times \eta)\right) . \end{aligned}$$

Nach der definierenden Eigenschaft von $\hat{X}$ sind die letzten Hom-Mengen einelementig, da man $X \times_Z Z'$ durch die Zusammenhangskomponente von $\bar{x} \times \eta$ ersetzen kann. Es sorgen ξ und η nun dafür, daß alle Abbildungen zusammenpassen. □

Definition. *Sei $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ ein Basispunkt von X mit Faserfunktor $F_{\bar{x}}$. Die Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt $\bar{x}$ sei*

$$\pi_1^{\textit{étale}}(X, \bar{x}) := \mathrm{Aut}(F_{\bar{x}})$$

In der Regel schreiben wir π_1 für $\pi_1^{\textit{étale}}$.

Proposition 1.1.5. *Sei $\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X$ ein Basispunkt. Jeder Wahl eines $\xi \in F_{\bar{x}}(\hat{X})$ entspricht ein Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} f_\xi : \pi_1(X,\bar{x}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Aut}_X(\hat{X})^{op} \\ \phi & \mapsto & \big(\xi \mapsto \phi(\xi)\big) \end{array}$$

Dabei wurden Automorphismen des Faserfunktors sinngemäß auf die Faser der universellen Überlagerung ausgedehnt, welche ein projektives System von Fasern étaler Überlagerungen ist.

Die Isomorphismen zu zwei Punkten $\xi_1, \xi_2 \in F_{\bar{x}}(\hat{X})$ unterscheiden sich um einen inneren Automorphismus.

Beweis: Proposition 1.1.4 zeigt, daß $\xi \mapsto \phi(\xi)$ einen Lift der Identität, also eine Decktransformation für $\hat{X}/X$ definiert.

Der Beweis der Behauptung findet sich in [SGA 1, V 4 & 5]. Auf der proendlichen Menge $F_{\bar{x}}(\hat{X})$ operiert $\mathrm{Aut}(F_{\bar{x}})$ transitiv frei von links und kommutiert mit der ebenfalls transitiven, freien Operation durch $\mathrm{Aut}_X(\hat{X})^{op}$ von rechts. Daraus folgt aus allgemeinen Gründen die Behauptung. □

Korollar. *Sind $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ zwei Basispunkte von X, so gilt*

$$\pi_1(X,\bar{x}_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X,\bar{x}_2)$$

eindeutig bis auf einen inneren Automorphismus. □

Korollar (Galoiskorrespondenz). *Durch die Wahl von $\hat{X}/X$ und $\xi \in F_{\bar{x}}(\hat{X})$ wie in der Proposition gibt es eine Galoiskorrespondenz, d. h. eine Bijektion wie folgt.*

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{c} \textit{abgeschlossene Untergruppen} \\ \textit{von } \pi_1(X,\bar{x}) \end{array} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \textit{pro-étale Überlagerungen} \\ \textit{zwischen } \hat{X} \textit{ und } X \end{array} \right\} \\ \big(H < \pi_1(X,\bar{x})\big) & \mapsto & \big(X_H := \hat{X}/H \to X\big) \\ \big(\mathrm{Aut}(\hat{X}/Y)^{op} < \mathrm{Aut}(\hat{X}/X)^{op}\big) & \leftarrow\!\shortmid & \big(\hat{X} \to Y \to X\big) \end{array}$$

Dabei entsprechen sich offene Untergruppen und endliche Überlagerungen, Normalteiler und galoissche Überlagerungen. □

1.2 Funktorialität

Definition. *Das Fundamentalgruppoid $\pi_1(X)$ zum Schema X besteht aus den Faserfunktoren $F_{\bar{x}}$ zu Basispunkten von X als Objekten und natürlichen Transformationen derselben als Morphismen.*

[SGA 1, V §4 h, V Prop 5.6] zeigen, daß in obiger Definition alle natürlichen Transformationen schon Isomorphismen sind, und wir es in der Tat sogar mit einem zusammenhängenden Gruppoid zu tun haben. In diesem gilt für die Automorphismengruppe eines Basispunktes $\bar{x}$:

$$\mathrm{Aut}_{\pi_1(X)}(F_{\bar{x}}) = \pi_1(X, \bar{x}) \ .$$

Definition. *Der Fundamentalgruppenfunktor* $\pi_1 : \mathrm{Sch} \to$ *Gruppoide ordnet jedem Schema sein Fundamentalgruppoid zu. Einem Morphismus* $f : X \to Y$ *entspricht ein Funktor*

$$\begin{array}{rcrcl} \pi_1(f) & : & \pi_1(X) & \to & \pi_1(Y) \\ & & F_{\bar{x}} & \mapsto & \big(F_{f(\bar{x})} = F_{\bar{x}} \circ (- \times_Y X)\big) \\ & & \big(\gamma : F_{\bar{x}_1} \to F_{\bar{x}_2}\big) & \mapsto & \big(\gamma_{(- \times_Y X)} : F_{f(\bar{x}_1)} \to F_{f(\bar{x}_2)}\big) \ . \end{array}$$

Auf Basispunkten entspricht dies gerade

$$\big(\bar{x} : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X\big) \ \mapsto \ \big(f(\bar{x}) : \mathrm{Spec}(\Omega) \to X \to Y\big) \ .$$

Zwar ist nun die étale Fundamentalgruppe als Funktor beschrieben, jedoch bildet dieser in die 2-Kategorie der Gruppoide ab.

Möchte man es wieder mit einer 1-Kategorie zu tun haben, so muß man von 2-Morphismen absehen. Allgemein gibt es zu einer 2-Kategorie $\mathcal{C}$ einen Funktor in eine 1-Kategorie mit den gleichen Objekten jedoch den Zusammenhangskomponenten der Kategorie $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Morphismen zu Objekten X und Y. Mit anderen Worten sind dies Äquivalenzklassen von 1-Morphismen bis auf „Homotopie“ mit einem 2-Morphismus. Jeder andere Funktor in eine 1-Kategorie faktorisiert eindeutig über die Kategorie dieser Konstruktion. Von mengentheoretischen Problemen sehen wir ab.

Man überzeugt sich leicht, daß dieser universelle Funktor die 2-Kategorie der zusammenhängenden Gruppoide in die Kategorie der Gruppen mit äußeren Morphismen abbildet. Im Fall des Fundamentalgruppenfunktors haben wir es mit pro-endlichen Gruppen und stetigen äußeren Morphismen zu tun. Diese topologische Zusatzstruktur fügt sich in die Überlegungen ein. Wir erhalten einen Funktor

$$\pi_1^{\acute{e}tale} : \mathrm{Sch} \to \mathcal{G}^{ext} \ ,$$

mittels dessen man sich wieder von der Wahl eines Basispunktes befreit hat.

Diese relativ konzeptionelle Überlegung klärt auf, über welche Morphismenmengen die Grothendieck-Vermutung im absoluten Fall eine Aussage machen soll. Im relativen Fall von Kurven über einem Körper müßte man sich etwas ähnliches einfallen lassen. Jedoch verbirgt sich in der natürlichen Generalisierung auf Gruppoide über einem Gruppoid die Falle, daß man beim Übergang in die universelle 1-Kategorie von allen inneren Automorphismen zu Elementen aus dem Urbild des Zentrums absehen muß. Da die folgende Konstruktion mit weniger Informationsverlust auskommt und sich näher an der Geometrie befindet, stellt sich die Frage nach der richtigen Definition. Diese Arbeit legt sich auf die folgende ad hoc Konstruktion fest.

Sei k ein Körper und $\overline{k}/k$ ein fest gewählter algebraischer Abschluß. Er entspricht einem Basispunkt $* : \operatorname{Spec} \overline{k} \to \operatorname{Spec} k$, und wir haben

$$G_k = \operatorname{Aut}(\overline{k}/k) = \pi_1(k, *) \ .$$

Definition. *Es bezeichne $\mathcal{G}_k$ die Kategorie der Extensionen von G_k, d.h. kurzen exakten Sequenzen*

$$P^\bullet \quad = \quad \big(1 \to \bar{P} \to P \to G_k \to 1\big)$$

von pro-endlichen Gruppen. Unter dem Kern der Sequenz verstehe man $\bar{P}$. Morphismen von Sequenzen heißen äquivalent, wenn sie sich nur um die Komposition mit einem inneren Automorphismus zu einem Element aus dem Kern unterscheiden. Die Morphismen der Kategorie $\mathcal{G}_k$ seien Äquivalenzklassen von Morphismen kurzer exakter Sequenzen, welche G_k identisch abbilden.

Unter Sch_k verstehen wir die Kategorie der quasikompakten, geometrisch zusammenhängenden Schemata über $\operatorname{Spec}(k)$.

Lemma 1.2.1. *Die Fundamentalgruppe macht einen Funktor*

$$\pi_1 : \mathrm{Sch}_k \longrightarrow \mathcal{G}_k \ .$$

Beweis: Man betrachte nur Basispunkte zusammmen mit einer $\overline{k}$-Struktur, d.h. nur solche von $X_{\overline{k}} = X \times_k *$. Sei also

$$\bar{x} : \operatorname{Spec}(\Omega) \to X_{\overline{k}} \to X$$

ein Basispunkt von X mit $\overline{k}$-Struktur. Es bezeichnet $F_{\bar{x}}(Y)$ wie üblich die Faser eines X-Schemas über $\bar{x}$ und $F_{\bar{x}}(Y/\overline{k})$, die Faser eines $X_{\overline{k}}$-Schemas über dem mißbräuchlich ebenso benannten Basispunkt $\bar{x}$ von $X_{\overline{k}}$.
Wir haben gemäß [SGA 1, IX Thm 6.1] eine exakte Sequenz

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{k}}, \bar{x}) \to \pi_1(X, \bar{x}) \to G_k \to 1 \ ,$$

also ein Objekt in $\mathcal{G}_k$. Um zu sehen, daß diese Sequenz in $\mathcal{G}_k$ bis auf kanonische Isomorphie von der Wahl des Basispunktes $\bar{x}$ unabhängig ist, wähle man eine universelle Überlagerung $\hat{X} \to X_{\overline{k}} \to X$ und zeige die kanonische Isomorphie in $\mathcal{G}_k$ mit der Sequenz

$$1 \to \operatorname{Aut}(\hat{X}/X_{\overline{k}})^{op} \to \operatorname{Aut}(\hat{X}/X)^{op} \to \operatorname{Aut}(X_{\overline{k}}/X)^{op} \to 1 \ ,$$

wobei durch Basiswechsel $\times_k X$ die Gruppen

$$G_k = \mathrm{Aut}(\operatorname{Spec} \overline{k} / \operatorname{Spec} k)^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X_{\overline{k}}/X)^{op}$$

zu identifizieren sind. Es operiert das Paar $\pi_1(X_{\overline{k}}, \bar{x}) < \pi_1(X, \bar{x})$ frei transitiv auf

$$F_{\bar{x}}(\hat{X}/\overline{k}) \subseteq F_{\bar{x}}(\hat{X})$$

von links. Verträglich damit operiert $\mathrm{Aut}(\hat{X}/X_{\overline{k}})^{op} < \mathrm{Aut}(\hat{X}/X)^{op}$ von rechts frei transitiv auf demselben Paar. Aus allgemeinen Gründen macht die Wahl eines Elements aus $F_{\bar{x}}(\hat{X}/\overline{k})$ einen Isomorphismus der Paare als solche. Unterschiedliche Wahlen resultieren in Kompositionen mit inneren Automorphismen zu Elementen aus den Kernen der kurzen exakten Sequenzen. Man sieht leicht, daß diese Isomorphismen von Paaren einen eindeutigen Isomorphismus in $\mathcal{G}_k$ beschreiben, denn sie passen mit der Identifikation $G_k \cong \mathrm{Aut}(X_{\overline{k}}/X)^{op}$ zusammen.

Nun zu Morphismen. Sei $f : X \to Y$ ein k-Morphismus. Man wähle $\bar{x}$ wie oben und setzte

$$\bar{y} = f(\bar{x}) : \operatorname{Spec}(\Omega) \to X_{\overline{k}} \to Y_{\overline{k}} \to Y \ .$$

Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_{\overline{k}} \arrow[r] \arrow[d, "f_{\overline{k}}"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & k \arrow[d, equal] \\
Y_{\overline{k}} \arrow[r] & Y \arrow[r] & k
\end{tikzcd}$$

ist verträglich mit diesen Punktierungen, demnach wird es von π_1 zu einem Morphismus in $\mathcal{G}_k$ transferiert. Für die Wohldefiniertheit vergleiche man wieder Decktransformationen und Punkte in $F_{\bar{x}}(\hat{X}/\overline{k})$ und $F_{\bar{x}}(\hat{Y}/\overline{k})$, welche durch eine Lift $\hat{f}$ von f ineinander abgebildet werden. □

Korollar (Galoiskorrespondenz über k). *Sei $X \in \mathrm{Sch}_k$. Durch die Wahl eines Repräsentanten für einen Isomorphismus von $\pi_1(X)$ mit der Sequenz*

$$1 \to \mathrm{Aut}(\hat{X}/X_{\overline{k}})^{op} \to \mathrm{Aut}(\hat{X}/X)^{op} \to \mathrm{Aut}(X_{\overline{k}}/X)^{op} \to 1$$

wie im Lemma wird eine „$\overline{k}$-Struktur“ gewählt, d. h. abgeschlossene Untergruppen von $\pi_1(X, \bar{x})$, korrespondieren zu pro-étalen Zwischenüberlagerungen mit festgelegtem Konstantenkörper in $\overline{k}/k$.

Definition. *Sei $X/k \in \mathrm{Sch}_k$. Dann heiße*

$$\overline{\pi}_1(X, \bar{x}) := \pi_1(X_{\overline{k}}, \bar{x})$$

geometrische Fundamentalgruppe von X.

1.3 Äußere Galoisdarstellungen

Wir erwähnen hier, daß die Sequenz $\pi_1(X)$ zu $X \in \mathrm{Sch}_k$ eine äußere Galoiswirkung des arithmetischen Teils G_k auf dem „topologischen Teil“ $\overline{\pi}_1(X)$ induziert,

$$\rho_X : G_k \to \mathrm{Out}\left(\overline{\pi}_1(X)\right)$$

und wie sich die Kategorie der äußeren Galoisdarstellungen mit $\mathcal{G}_k$ vergleichen läßt. Daraus werden wir ein hilfreiches Resultat über die Existenz von Morphismengarben erhalten.

Definition. *Sei G eine Gruppe, aufgefaßt als Kategorie mit einem Objekt, und $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie. Dann ist die Funktorkategorie Fun$(G, \mathcal{C})$ die Kategorie der G-Darstellungen in $\mathcal{C}$ und wird mit $\mathcal{C}(G)$ bezeichnet.*

Ein Objekt aus $\mathcal{C}(G)$ besteht aus einem Objekt $X \in \mathcal{C}$ und einem Gruppenhomomorphismus $\rho_X : G \to \mathrm{Aut}(X)$, und es gibt einen Vergißfunktor $\mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}$. Das Konzept der Funktorkategorie ist kontravariant im ersten und kovariant im zweiten Argument. Gruppenhomomorphismen $\phi : H \to G$ induzieren einen Pullbackfunktor

$$\phi^* : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(H) \ .$$

Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ setzt sich fort zu einem Funktor

$$F(G) : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{D}(G) \ .$$

Satz 1.3.1. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und k ein Körper. Für Objekte $X, Y \in \mathcal{C}(G_k)$ definiert*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \ : \ l/k \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_l)}(X,Y)$$

eine Garbe auf $k_{ét}$. Die Isomorphismen bilden darin eine Untergarbe

$$\underline{\mathrm{Isom}}(X,Y) \subseteq \underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \ .$$

Beweis: Die Pullback-Konstruktion ist verträglich mit der Komposition von Gruppenhomomorphismen. Deshalb definiert $\mathrm{res}_k^l = (G_l \hookrightarrow G_k)^*$ eine Prägarbenstruktur auf den Hom-Mengen.

Es gibt eine G_k Operation auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$:

$$\begin{array}{rcl} G_k \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \\ (\sigma, f) & \mapsto & \sigma.f = \rho_Y(\sigma) \circ f \circ \rho_X(\sigma)^{-1} \end{array}$$

Damit wird $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)(l) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)^{G_l}$ und für eine galoissche Erweiterung l/k ist klar:

$$\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)(k) = \left[\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)(l)\right]^{G(l/k)} \ .$$

Dies ist genau die Garbeneigenschaft, denn man analysiert

$$\prod_{\bar\sigma \in G(l/k)} (\bar\sigma \cdot id) \ : \ l \otimes_k l \xrightarrow{\sim} \prod_{\bar\sigma \in G(l/k)} l \ ,$$

und für ein Urbild $(\sigma \mapsto \bar\sigma)$ muß man deshalb die Invarianten bestimmen unter

$$\mathrm{res}_l^l \ (\text{via } \bar\sigma : l \to l) \ = \big(\pi_1(\sigma) : G_l \to G_l\big)^* = (f \mapsto \sigma.f) \ .$$

Die Aussage über die Untergarbe der Isomorphismen ist offensichtlich. □

Gegeben eine kurze exakte Sequenz aus $\mathcal{G}_k$. Sie induziert kanonisch einen Homomorphismus von G_k in die äußeren Automorphismen des Kerns, und zwar ordnen wir einem Element aus G_k die Einschränkung der Konjugation mit einem beliebigen Urbild auf den Kern zu. Diese Konstruktion ist funktoriell.

Definition. *Der eben beschriebene Funktor heiße Funktor der äußeren Galoisdarstellung*

$$R : \mathcal{G}_k \to \mathcal{G}^{ext}(G_k) \ .$$

Diese äußere Galoisoperation ist für die Fundamentalgruppe eines Schemas über k geometrischen Ursprungs. Sie resultiert aus Automorphismen des Basiswechsels zum algebraischen Abschluß. Denn vermöge

$$\begin{array}{ccc} G_k & \to & \mathrm{Aut}(X_{\overline{k}}) \\ \sigma & \mapsto & id \times \sigma^{-1} \ , \end{array}$$

erhält man durch Basiswechseln einen Funktor

$$\times_k \overline{k} : \mathrm{Sch}_k \to \mathrm{Sch}(G_k) \ .$$

Dieser sitzt in einem kanonisch kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sch}_k \arrow[r, "\times_k \overline{k}"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathrm{Sch}(G_k) \arrow[d, "\pi_1(G_k)"] \\ \mathcal{G}_k \arrow[r, "R"] & \mathcal{G}^{ext}(G_k), \end{tikzcd}$$

denn für ein Urbild $\hat\sigma \in \pi_1(X)$ von σ gilt

$$\pi_1(id \times \sigma^{-1}) = \hat\sigma(\cdot)\hat\sigma^{-1} \ ,$$

wie man leicht in der opponierten zur Decktransformationsgruppe $\mathrm{Aut}(\hat X/X)$ nachrechnet. Es liftet nämlich $\hat\sigma^{-1}$ den Automorphismus $id \times \sigma^{-1}$ von $X_{\overline{k}}$ in die universelle Überlagerung $\hat X$.

Definition. *Ein Objekt aus $\mathcal{G}_k$ heiße zentralfrei, falls es sich um eine Extension mit zentralfreiem Kern handelt.*

Eine äußere Galoisdarstellung in $\mathcal{G}^{ext}(G_k)$ heiße zentralfrei, wenn dies für die zugrundeliegende pro-endliche Gruppe gilt.

Satz 1.3.2. *Die Einschränkung von R auf die vollen Unterkategorien der zentralfreien Objekte ist wesentlich surjektiv und eine Äquivalenz der zugehörigen Isomorphiegruppoide.*

Beweis: Wir betrachten nur die Isomorphiegruppoide und konstruieren als Inverses einen Funktor Pb (wie Pullback). Für ein $\rho : G_k \to Out(V)$ definieren wir $Pb(\rho) \in \mathcal{G}_k$ als das Pullback der Automorphismenextension

$$1 \to \mathrm{Inn}(V) \to \mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{Out}(V) \to 1$$

mittels ρ. Durch „transport de structure“ induzieren Isomorphismen von pro-endlichen Gruppen Isomorphismen ihrer Automorphismenextensionen. Darstellungsmorphismen setzen sich fort auf die Pullbacks. Die herauszuteilenden Äquivalenzrelationen nach inneren Mophismen verhalten sich wohl.

Wir haben immer natürliche Transformationen $P^\bullet \to Pb \circ R(P^\bullet)$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \bar{P} \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & G_k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Inn}(\bar{P}) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\bar{P}) \times_{\mathrm{Out}(\bar{P})} G_k \arrow[r] & G_k \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

und $V \to R \circ Pb(V) = \mathrm{Inn}(V)$, welche genau für zentralfreie Objekte Isomorphismen sind. □

Korollar. *Für zentralfreie Objekte in $\mathcal{G}_k$ sind die* Isom*-Mengen globale Schnitte von Garben auf $k_{\acute{e}t}$, und für X, X' aus* Sch_k *mit zentralfreier geometrischer Fundamentalgruppe macht*

$$\pi_1 : \underline{\mathrm{Isom}}_{G_k}\big(X, X'\big) \to \underline{\mathrm{Isom}}_{G_k}\big(\pi_1(X), \pi_1(X')\big)$$

einen Morphismus von Garben.

Beweis: In Sch_k hat man nach Galoisabstiegstheorie ebenso die zusätzliche Struktur einer Garbe, deren globale Schnitte die Isomorphismen sind. Diese erhält man auch aus der allgemeinen Konstruktion zu G_k-Darstellungskategorien aus der Kategorie $\mathrm{Sch}(G_k)$. Der Funktor π_1 verträgt sich mit der allgemeinen Konstruktion und induziert deshalb einen Garbenmorphismus. □

1.4 Die zahme Fundamentalgruppe

Wir beschränken uns hier auf Kurven. Allgemeinere Ausführungen über normale Schemata ausgestattet mit einem Divisor mit normaler Überkreuzung findet man in [GM71].

Sei $C = (X, D)$ eine glatte Kurve über k. Eine endliche Abbildung $X' \to X$ mit normaler Kurve X' heißt zahme Überlagerung von C, falls sie höchstens entlang des Trägers von D und dort auch schlimmstenfalls zahm verzweigt ist. Dies bedeutet, daß in Charakteristik p die p-Sylowgruppen der Trägheitsgruppen verschwinden. Die Kategorie der zahmen Überlagerungen Rev_C^{tame} ist eine Untertensorkategorie von Rev_C. Der Apparat von [SGA 1, V] findet Anwedung [SGA 1, XIII 2.1.3] [GM71, 2.4.2] und wir erhalten zahme Fundamentalgruppen $\pi_1^{tame}(C, \bar{c})$ zu Basispunkten $\bar{c}$ von C, sowie eine Surjektion

$$\pi_1^{étale}(C, \bar{c}) \twoheadrightarrow \pi_1^{tame}(C, \bar{c}) \ . \tag{$*$}$$

Mit der Bezeichnung $\overline{\pi}_1^{tame}(C) = \pi_1^{tame}(C_{\overline{k}})$, haben wir auch eine Abbildung zwischen kurzen exakten Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \overline{\pi}_1(C) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \pi_1^{étale}(C) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & G_k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \overline{\pi}_1^{tame}(C) \arrow[r] & \pi_1^{tame}(C) \arrow[r] & G_k \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \tag{$**$}$$

Kurz gesagt gibt es Funktoren

$$\pi_1^{tame} : \mathrm{Sch} \to \mathcal{G}^{ext} \qquad \text{und} \qquad \pi_1^{tame} : \mathrm{Sch}_k \to \mathcal{G}_k \ ,$$

und die Abbildungen $(*, **)$ sind natürliche Transformationen $\pi_1 \twoheadrightarrow \pi_1^{tame}$ in der jeweiligen Situation.

Die kurze exakte Sequenz für π_1^{tame} wird in [Tam97] mit $\pi_1^{tame}(C_{k^{sep}})$ als Kern zitiert. Deshalb überlegen wir uns

Lemma 1.4.1. *Die natürliche Projektion $C_{\overline{k}} \to C_{k^{sep}}$ induziert einen Isomorphismus*

$$\pi_1^{tame}(C_{\overline{k}}) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{tame}(C_{k^{sep}}) \ .$$

Beweis: Sei ohne Einschränkung $k = k^{sep}$.

surjektiv: Eine zahme zusammenhängende Überlagerung von C ist generisch étale und hat deshalb eine separable Konstantenkörpererweiterung, also keine. Sie bleibt somit nach Basiswechsel $\times_k \overline{k}$ und Normalisierung zusammenhängend.

injektiv: Man muß zahme, o.E. galoissche Überlagerungen als solche absteigen lassen. Zunächst ist jede generisch étale Überlagerung $C' \to C_{\overline{k}}$ mit einer normalen Kurve die Normalisierung des Basiswechsels einer generisch étalen Überlagerung von C mit einer normalen Kurve. Dies sieht man wie folgt. Sei $\tilde{k}/k$ eine endliche rein inseparable Konstantenkörpererweiterung, über der die Überlagerung schon definiert ist. Dann kann man sich mittels Dedekind-Weber Äquivalenz auf die Funktionenkörper konzentrieren.

$$\begin{tikzcd} \tilde{k}(C') \arrow[d, dash, "\text{separabel}"'] & \\ \tilde{k}(C) \arrow[r, dash, "\text{rein insep.}"'] & k(C) \end{tikzcd}$$

Sei L der separable Abschluß von $k(C)$ in $\tilde{k}(C')$. Dann sind L und $\tilde{k}$ linear disjunkt und aus Gradgründen $L\tilde{k} = \tilde{k}(C')$, denn separabler und rein inseparabler Körpergrad sind multiplikativ. L ist der Funktionenkörper eines Modells von C' über k.

Dieses Modell ist étale bzw. zahm über C an Punkten, die über $\overline{k}$ dieses Verhalten zeigen. Es lassen nämlich rein inseparable Erweiterungen nur eine Fortsetzung von Bewertungen zu. In der fundamentalen Gleichung für eine Stelle in C und ihre Fortsetzung in $C_{\overline{k}}$ sind demnach die Anzahlen der Stellen gleich und somit auch die Produkte $e \cdot f$. Da k separabel abgeschlossen ist, erweist sich zahm als gleichbedeutend zu $p \nmid e \cdot f$ und étale zu $e \cdot f = 1$. $\square$

1.5 Rekonstruktion einiger Invarianten

Einige Invarianten einer glatten Kurve ermittelt man unmittelbar aus ihrer Fundamentalgruppe $\pi_1^{étale}$ bzw. π_1^{tame} als Objekte in $\mathcal{G}_k$, ja es reicht sogar die jeweilige geometrische Fundamentalgruppe zu kennen. Allerdings lassen sich die Fälle trivialer geometrischer Fundamentalgruppe nicht unterscheiden. Man weiß jedoch, daß es sich dann um ein Modell des $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ oder den $\mathbb{A}^1_k$ handelt, letzteres für $\pi_1^{étale}$ nur in Charakteristik 0. Diese Fälle müssen wir von den folgenden Überlegungen ausschließen.

Wir betrachten im Folgenden stets eine glatte k-Kurve $C = (X, D)$ vom Typ (g, r). Alle Fundamentalgruppen beziehen sich auf sie. Es sei l eine Primzahl. Allgemein bekannt sind die Bettizahlen

$$\begin{aligned} b_1(l) := \; & \dim_{\mathbb{F}_l} H^1_{ét}(C_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) && = \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_l} \overline{\pi}_1(C)^{ab,l} \\ b_2(l) := \; & \dim_{\mathbb{F}_l} H^2_{ét}(C_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) && = \begin{cases} 0 & \text{falls } C \text{ affin} \\ 1 & \text{falls } C \text{ projektiv} \end{cases} \end{aligned}$$

und ihre Beziehungen zur Eulercharakteristik, falls $l \neq p := \mathrm{char}(k)$, und dem p-Rang der Jacobischen.

$$\begin{aligned} \chi_C &= 1 - b_1(l) + b_2(l) = 2 - 2g - r \\ b_1(p) &= \begin{cases} \infty & \text{affin} \\ p\text{-rang}(\mathrm{Jac}_X) \leq g & \text{projektiv} \end{cases} \end{aligned}$$

Eine offene Untergruppe $H < \pi_1$ entspricht einer Kurve $C_H \to C$, deren Invarianten mit dem gleichen Symbol, aber einem Index H bezeichnet werden.

Proposition 1.5.1. *Ein nichttriviales $\overline{\pi}_1^{étale}$ bestimmt* $\mathrm{char}(k), b_2$ *und* χ_C.

Beweis: Betrachte b_1 als Funktion auf den Primzahlen. Ist b_1 nicht konstant, so verrät die abweichende Primzahl die Charakteristik. Der Wert dort entscheidet b_2, der Wert sonst berechnet χ_C.
Ist b_1 hingegen konstant, so liegt Charakteristik 0 vor. Ansonsten wäre nämlich

$$2g \leq 2g + r + b_2(l) - 1 = p\text{-rang}(\mathrm{Jac}_X) \leq g \ ,$$

demnach $g = 0$ und $r = 0$ oder 1. Diese Fälle sind aber ausgeschlossen worden oder haben $b_1(p) = \infty$.

Sei nun die Charakteristik 0. Es ist $\overline{\pi}_1 \neq 1$, weshalb man eine echte offene Untergruppe $H < \overline{\pi}_1$ betrachten kann. In der Riemann-Hurwitzformel

$$\chi_{C_H} = (\overline{\pi}_1 : H) \cdot \chi_C$$

ist nur $b_{2,H} = b_2$ unbekannt. Man berechne b_2 und daraus χ_C. □

Proposition 1.5.2. *In $\mathcal{G}_k$ ist $\pi_1 \twoheadrightarrow \pi_1^{tame}$ gruppentheoretisch codiert, d.h. jeder Isomorphismus zweier π_1 ist wohldefiniert auf den Quotienten:*

$$\mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1(C), \pi_1(C')\right) \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \ .$$

Beweis: Man muß nur den Kern $\overline{\pi}_1 \twoheadrightarrow \overline{\pi}_1^{tame}$ herausteilen. Dieser ist charakterisiert als der Schnitt aller offenen $H < \overline{\pi}_1$, welche zahmen Überlagerungen entsprechen. Diese erkennt man an der Gültigkeit der Riemann-Hurwitz-Formel

$$\chi_{C_H} = (\overline{\pi}_1 : H) \cdot \chi_C \ .$$

Über die Eulercharakteristiken der beteiligten Kurven verfügt man nach Proposition 1.5.1 außer im Fall trivialer $\overline{\pi}_1$, für den sowieso nichts zu tun bleibt. □

Hier muß man bemerken, daß die Riemann-Hurwitz-Formel nicht direkt auf étale Überlagerungen von C angewandt werden kann, da normale Kurven nicht notwendigerweise glatt zu sein brauchen. Über $\overline{k}$ ist dies allerdings der Fall.

Proposition 1.5.3. *Ein nichttriviales $\overline{\pi}_1^{tame}$ bestimmt* $\mathrm{char}(k), b_2$ *und* χ_C. *Ist k endlich erzeugt, wird auch der Typ (g,r) erkannt.*

Beweis: Aus der zahmen Fundamentalgruppe erhält man „zahme " Bettizahlen

$$b_1^{tame}(l) := \mathrm{rg}_{\mathbb{Z}_l}\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)^{ab,l}\right) = \begin{cases} 1 + b_2 - \chi_C & l \neq \mathrm{char}(k) \\ p\text{-rang}(\mathrm{Jac}_X) \leq g & l = \mathrm{char}(k) = p \end{cases}$$

Da $\overline{\pi}_1^{tame}$ nicht verschwindet, ist wie zuvor $b_1^{tame}(l)$ genau für $\mathrm{char}(k) = 0$ konstant. Nun verwenden wir die Argumentation von Proposition 1.5.1.

Zur Bestimmung des Typs unterscheiden wir nach dem Vorzeichen von χ_C. Positive χ_C haben triviale $\overline{\pi}_1^{tame}$, bei $\chi_C = 0$ entscheidet b_2 zwischen $(1,0)$ und $(0,2)$. Falls $\chi_C < 0$, so spezialisieren wir wiederholt mittels [Tam97, Thm 5.7] (in dieser Arbeit zitiert als Theorem 5) zu einer Kurve über einem endlichen Körper und lesen mit [Tam97, Prop 3.5] deren Typ aus π_1^{tame} ab. Genaueres zum Prozeß des Spezialisierens beinhaltet der Beweis von Lemma 4.1.1. □

Proposition 1.5.4. *Sei k endlich erzeugt. In $\mathcal{G}_k$ ist $\pi_1^{tame}(C) \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ gruppentheoretisch codiert, d.h. jeder Isomorphismus zweier π_1^{tame} ist wohldefiniert auf den Quotienten:*

$$\mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1(X), \pi_1(X')\right) .$$

Beweis: Es gilt alle offenen Untergruppen H von π_1^{tame} zu bestimmen, die Überlagerungen $C_H \to C$ entsprechen, welche auf ganz X étale sind. Da die überlagernde Kurve über D höchstens zahm verzweigt ist, besitzt sie dort auch separable Restklassenkörper, die Begriffe glatt und normal fallen somit zusammen. Deshalb stimmen die gesuchten Untergruppen überein mit denen, welche die Riemann-Hurwitz-Formel ohne Verzweigungsterm erfüllen:

$$2g_{C_H} - 2 = \left(\pi_1^{tame} : H\right) / \left(G_k : pr(H)\right) \cdot (2g_C - 2) .$$

Das Geschlecht aber ist immer bekannt: entweder nach Proposition 1.5.3 oder bei trivialer geometrischer Fundamentalgruppe zwingend gleich 0. □

Kapitel 2

Invertieren von Frobenius

2.1 Lokalisieren von Kategorien

Dieses Kapitel dient zur Erinnerung, als Referenz sei auf [KS90, 1.6] verwiesen. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine multiplikative Klasse von Morphismen, d.h. sie enthält die Identitäten und ist abgeschlossen unter Komposition. In Diagrammen stehen Doppelpfeile für Morphismen aus S. Eine Lokalisierung von $\mathcal{C}$ an S ist ein Funktor von $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $[S]^{-1}\mathcal{C}$, unter dem alle Morphismen aus S auf Isomorphismen abgebildet werden und über welchen jedweder andere Funktor mit dieser Eigenschaft eindeutig faktorisiert.

Folgende Eigenschaften von S sind in diesem Zusammenhang interessant. Eine Punktierung des Pfeils bedeute hier Existenz, nicht aber Eindeutigkeit des Morphismus, und Objekte wurden in der Notation ignoriert.

	zu	gibt es		zu	gibt es
1.)	$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[d, Rightarrow, dotted, "t"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \end{tikzcd}$	1.)’	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \cdot \\ \cdot & \end{tikzcd}$	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, Rightarrow, "s"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, dotted, "t"] \\ \cdot \arrow[r, dotted, "g"'] & \cdot \end{tikzcd}$
2.)	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] & \cdot \end{tikzcd}$ $s \circ f = s \circ g$	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, dotted, "t"] & \cdot \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \cdot \end{tikzcd}$ $f \circ t = g \circ t$	2.)’	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] & \cdot \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \cdot \end{tikzcd}$ $f \circ s = g \circ s$	$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \cdot \arrow[r, Rightarrow, dotted, "t"] & \cdot \end{tikzcd}$ $t \circ f = t \circ g$

Der Sinn dieser Forderungen beruht im Wunsch, „Brüche“ auf einen gemeinsamen „Nenner“ zu bringen und einen sinnvollen Begriff des „Erweiterns“ zu haben. Die folgenden Bedingungen hingegen garantieren nur, daß man es auch tatsächlich mit Morphismen*mengen* zu tun hat.

3.) für alle $X \in \mathcal{C}$ existiert eine cofinale Menge M_X in der Klasse $S_X := \{s \in S | s : Y \Rightarrow X\}$, d.h.

$$\text{für alle} \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[d, Rightarrow] \\ X \end{tikzcd} \quad \text{gibt es } s \in M_X : \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, dotted] \arrow[dr, Rightarrow, dotted, "s"'] & {} \arrow[d, Rightarrow] \\ & X \end{tikzcd}$$

3.)' für alle $X \in \mathcal{C}$ existiert eine finale Menge M^X in der Klasse $S^X := \{s \in S | s : X \Rightarrow Y\}$, d.h.

$$\text{für alle} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, Rightarrow] \\ {} \end{tikzcd} \quad \text{gibt es } s \in M^X : \quad \begin{tikzcd} X \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, dotted, "s"] & \\ {} \arrow[r, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

Proposition 2.1.1. *Gelten 1)-3), so gibt es $\mathcal{C} \to [S]^{-1}\mathcal{C}$.* $\square$

Die Objekte bleiben dieselben wie in $\mathcal{C}$. Die Konstruktion der Morphismen vergleiche man mit dem Lokalisieren von Ringen: dort werden formale Brüche gebildet, hier heißen sie „Dächer“, und zwar je nach Lage der Nenner „Links-“ oder „Rechtsdächer“.

$$\mathrm{Hom}_{[S]^{-1}\mathcal{C}}(X, Z) := \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] & Y \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr] & \\ X & & Z \end{tikzcd} \right\} /\sim$$

Es wird $\sim$ erzeugt durch Domination:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Y_1 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr] & \\ X & & Z \end{tikzcd} \sim \begin{tikzcd}[column sep=small] & Y_2 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr] & \\ X & & Z \end{tikzcd} \quad \text{falls} \quad \begin{tikzcd} & Y_2 \arrow[d, dotted] \arrow[ddl, Rightarrow] \arrow[ddr] & \\ & Y_1 \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr] & \\ X & & Z \end{tikzcd}$$

Hat man 1)'-3)' zur Verfügung, kann man auch analog „Rechtsdächer“ $\to\Leftarrow$ verwenden und erhält eine äquivalente Beschreibung.

Über das Verhalten von Unterkategorien beim Lokalisieren kann man das Folgende sagen.

Proposition 2.1.2. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S eine multiplikative Klasse, welche 1)-3) erfüllt. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ eine volle Unterkategorie, für alle deren Objekte $X \in \mathcal{D}$ gilt, daß*

$$\{f \in S_X | f : Y \Rightarrow X, Y \in \mathcal{D}\} \subseteq S_X = \{s \in S | s : Y \Rightarrow X\}$$

eine cofinale Teilklasse darstellt. Sei $S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Mor}(\mathcal{D}) \cap S$. *Dann ist*

$$[S_D]^{-1}\,\mathcal{D} \subseteq [S]^{-1}\,\mathcal{C}$$

eine volle Unterkategorie.

Beweis: Einfache Übung. S_D erfüllt 1)-3), jedes Dach ist äquivalent zu einem aus $\mathcal{D}$ und jede Relation kann man in $\mathcal{D}$ geschehen lassen. □

Das Bilden von relativen Kategorien, also der Kategorie $\mathcal{C}/B$ aller Pfeile über einer festen Basis $B \in \mathcal{C}$, verträgt sich auch mit dem Lokalisieren.

Proposition 2.1.3. *Sei* $\mathcal{C}$ *eine Kategorie,* $B \in \mathcal{C}$ *und* S *eine multiplikative Klasse, welche 1)-3) erfüllt. Setze*

$$S/B := \{s \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C}/B) \mid \textit{vergiß} : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C} \quad \textit{bildet } s \textit{ nach } S \textit{ ab}\ \}\ .$$

Dann ist der natürliche Funktor

$$[S/B]^{-1}\,\mathcal{C}/B \to \left([S]^{-1}\mathcal{C}\right)/B$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis: Einfache Übung mit „Dächern“. □

2.2 Quasi-Isomorphismen für π_1

Fixieren wir eine Primzahl p. Auf der Kategorie $Sch_{\mathbb{F}_p}$ der Schemata über $\mathbb{F}_p$ gibt es eine ausgezeichnete natürliche Endotransformation des Identitätsfunktors, den Frobenius.

$$\mathrm{Frob}_p : id_{Sch_{\mathbb{F}_p}} \longrightarrow id_{Sch_{\mathbb{F}_p}}$$

Auf affinen Teilen ist sie durch $x \longmapsto x^p$ gegeben. Dort sieht man auch, daß die topologische Komponente von Frob_p den zugrundeliegenden topologischen Raum identisch abbildet.

Ist nun T ein Schema über $\mathbb{F}_p$, so erlaubt folgende Konstruktion die Definition eines relativen T-Frobenius für ein Schema X über T :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "T\text{-Frob}"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{Frob}_p"] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X(1) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d] \\
& T \arrow[r, "\mathrm{Frob}_p"] & T
\end{tikzcd}$$

Als Struktur ergibt sich ein Endofunktor von Sch_T, der Frobeniustwist

$$\cdot(1) : Sch_T \longrightarrow Sch_T$$

und eine natürliche Transformation, der relative T-Frobenius

$$T\text{-Frob} : id_{Sch_T} \longrightarrow \cdot(1)$$

Diese verhalten sich wohl unter Basiswechsel, wie eine einfache Diagrammjagd ergibt:

$$\big(X \times_T S\big)(1) = X(1) \times_T S \quad \text{und} \quad S\text{-Frob} = T\text{-Frob} \times_T S$$

Im allgemeinen sind jedoch X und sein Twist $X(1)$ weder als T-Schema noch als Schema isomorph. Als Beispiele dienen eine inseparable Körpererweiterung l/k, deren $l(1)$ nicht mehr reduziert ist, oder $\mathbb{P}^1_k - \{0, 1, \lambda, \infty\}$, dessen Twist bei $0, 1, \lambda^p, \infty$ punktiert ist.

Ein Schema heiße perfekt, falls Frob_p auf ihm ein Isomorphismus ist. Man beachte, daß nur im Fall einer perfekten Basis $X(1) \to X$ zwangsläufig ein Isomorphismus von Schemata ist. In diesem Falle wird die T-Struktur auf $X(1)$ durch Verlängern der Strukturabbildung $X \to T$ mittels Frob_p^{-1} erhalten.
Wir schreiben die n-te Potenz von $\cdot(1)$ als $\cdot(n)$ und bezeichnen

$$T\text{-Frob}^n := T\text{-Frob}(n-1) \circ \ldots \circ T\text{-Frob}(1) \circ T\text{-Frob} : X \to X(n)$$

als die n-te „Potenz" des relativen T-Frobenius.

Definition. *Ein Schemamorphismus, dessen sämtliche Basiswechsel Homöomorphismen sind, heißt universeller Homöomorphismus.*

Typische Beispiele sind Frob_p, $X_{red} \hookrightarrow X$ und $\mathbb{A}^1_k \to \text{Spec}(k[t^2, t^3])$, denn diese sind radiziell, surjektiv und ganz, daher universell injektiv, surjektiv und abgeschlossen. Aber auch T-Frob als „Quotient" von Frob_p und einem Basiswechsel von Frob_p ist universell homöomorph.

Proposition 2.2.1. *In $\mathcal{G}^{ext}$ gilt $\pi_1(\text{Frob}_p) = id$.*

Beweis: Sei $\bar{x} : \text{Spec}(\Omega) \to X$ ein geometrischer Punkt und $F_{\bar{x}}$ der zugehörige Faserfunktor auf Rev_X. Diesen wenden wir auf die natürliche Transformation X-Frob an, welche ein universeller Homöomorphismus ist. Deshalb wird sie zu einem Isomorphismus von Faserfunktoren

$$\begin{array}{rcl} F_{\bar{x}}(X\text{-Frob}) : F_{\bar{x}} & \xrightarrow{\sim} & F_{\text{Frob}_p(\bar{x})} \\ F_{\bar{x}}(Y/X) = Y \times_X \bar{x} & \xrightarrow{\sim} & Y(1) \times_X \bar{x} = F_{\text{Frob}_p(\bar{x})}(Y/X) \ . \end{array}$$

Per Definition gilt

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(\text{Frob}_p) : \pi_1(X, F_{\bar{x}}) & \to & \pi_1(X, F_{\text{Frob}_p(\bar{x})}) \\ \gamma & \mapsto & \gamma|_{(\text{Rev}_X)(1)} = \big(Y/X \mapsto \gamma_{Y(1)/X}\big) \ . \end{array}$$

Dieser Morphismus wird aber vom Isomorphismus $F_{\bar{x}}(X\text{-Frob})$ der Faserfunktoren induziert, denn

$$\begin{tikzcd}
F_{\bar{x}}(Y/X) \arrow[r, "\gamma_{Y/X}"] \arrow[d, "F_{\bar{x}}(X\text{-Frob})"'] & F_{\bar{x}}(Y/X) \arrow[d, "F_{\bar{x}}(X\text{-Frob})"] \\
F_{\mathrm{Frob}_p(\bar{x})}(Y/X) \arrow[r, "\gamma_{Y(1)/X}"'] & F_{\mathrm{Frob}_p(\bar{x})}(Y/X)
\end{tikzcd}$$

kommutiert, weil γ eine natürliche Transformation ist.

Ein Isomorphismus von Automorphismengruppen des Fundamentalgruppoids, welcher von einem Isomorphismus der Objekte kommt, ist ein „innerer“ Morphismus. In der Homotopiekategorie $\mathcal{G}^{ext}$ wird er zur Identität. □

Dieses Ergebnis verwundert nicht, denn [EGA 4, Kor 18.12.11, Prop 18.12.8] und [SGA 4, VIII 1.1] kombinieren zu folgenden Aussagen, welche in Theorem 1 gipfeln.

Satz 2.2.2. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung von Schemata. Es sind äquivalent:*

1. *f ist ein universeller Homöomorphismus*
2. *Zariski-lokal in Y gibt es $X_i \to Y$, welche endlich, radiziell und surjektiv sind, und es gilt $X \cong \varprojlim X_i$ als Y-Schemata.*

Beweis: „$\Leftarrow$ “ ist klar; für Eigenschaften von $\varprojlim$ siehe [EGA 4, §8].
Für „$\Rightarrow$ “ weisen wir zunächst f als affin nach. Dies ist aufgrund der Homöomorphie eine lokale Frage in X. Ohne Einschränkung sei $Y \subseteq \text{affin} = \tilde{Y}$ und X affin. Überdecke jetzt Y mit Standardoffenen, welche von globalen Funktionen von $\tilde{Y}$ kommen. Die Urbilder sind die entsprechenden Standardoffenen von X, der Morphismus ist also affin.
f ist radiziell, da universell injektiv. [EGA 4, Prop 18.12.8] gibt:

$$\text{ganz} \iff \text{affin und universell abgeschlossen} .$$

Damit wissen wir auch ganz. Jedoch liefert der Beweis aus [EGA 4, Prop 18.12.8] genauer, daß für Unteralgebrengarben $\mathcal{A} \subseteq f_*\mathcal{O}_X$, welche von endlichem Typ über $\mathcal{O}_Y$ sind, $\mathrm{Spec}_Y(\mathcal{A}) \to Y$ ein endlicher universeller Homöomorphismus ist. Zariski-lokal, z.B. auf affinen offenen Teilen von Y, ist $f_*\mathcal{O}_X$ die Vereinigung solcher $\mathcal{A}$ und daher $X \cong \varprojlim X_i$, wie gefordert. □

Proposition 2.2.3. *Ist Y noethersch und $f : X \to Y$ ein universeller Homöomorphismus. Dann gilt global $X \cong \varprojlim X_i$ als Y-Schemata mit endlichen universellen Homöomorphismen $X_i \to Y$.*

Beweis: $f_*\mathcal{O}_X$ ist Vereinigung aller kohärenter $\mathcal{O}_Y$-Untermoduln [Ha77], und damit auch Vereinigung aller Unteralgebren vom endlichen Typ. Weiter geht es mit dem gleichen Argument aus [EGA 4, Prop 18.12.8], welches schon in Satz 2.2.2 benutzt wurde. □

Theorem 1 (topologische Invarianz). *Sei $f : S' \to S$ ein universeller Homöomorphismus zwischen zusammenhängenden Schemata. Dann ist $\pi_1(f)$ ein Isomorphismus.*

Beweis: [SGA 4, VIII 1.1] zeigt $f^* : \mathrm{Et}_S \xrightarrow{\cong} \mathrm{Et}_{S'}$. Der Abstieg von Endlichkeit ist eine Zariski-lokale Frage. Dort haben wir für f die Struktur als Limes über endliche universelle Homöomorphismen. Aus [SGA 1, IX Thm 4.12] und Limesbetrachtungen [EGA 4, §8] folgt dann auch $f^* : \mathrm{Rev}_S \xrightarrow{\cong} \mathrm{Rev}_{S'}$. □

Man hat also ein Interesse, an der Klasse der universellen Homöomorphismen zu lokalisieren, wie es schon Grothendieck in seinen „esquisse" vorgesehen hat [Gr84, Fußnote 3].

2.3 Eine geometrische Kategorie

Proposition 2.3.1. *Die multiplikative Klasse der universellen Homöomorphismen erfüllt die Eigenschaften 1)-3) des Lokalisierens. Wir definieren*

$$\mathrm{TSch} := [\textit{universelle Homöomorphismen}]^{-1}\,\mathrm{Sch} \quad .$$

Beweis: Basiswechseln liefert 1). Für 2) betrachte zu

$$X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} S' \Longrightarrow S$$

das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(f,g)}"] & S' \times_S S' \arrow[r] & S' \\ X' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & S' \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd} \quad , \qquad (*)$$

in dem die Diagonale Δ ein universeller Homöomorphismus ist, damit aber auch der Basiswechsel $X' \to X$.

Zu einem Schema X gibt es nur mengenviele Isomorphieklassen von Abbildungen, welche Zariski-lokal der Form $\varprojlim X_i \to X$ mit endlichen $X_i \to X$ sind. Mit dem Hinweis auf Satz 2.2.2 begründet dies die Eigenschaft 3). □

Das Kürzen und Erweitern erleichtert wesentlich die folgende Proposition.

Proposition 2.3.2.

a) Universelle Homöomorphismen sind monomorph auf reduzierten Schemata; d.h. sei X reduziert und $S' \Rightarrow S$ ein universeller Homöomorphismus, dann gilt:

$$\mathrm{Hom}(X, S') \hookrightarrow \mathrm{Hom}(X, S) \ .$$

b) *Surjektionen mit reduziertem Zielschema sind Epimorphismen in der Kategorie der Schemata; d.h. ist $S' \twoheadrightarrow S$ und S reduziert, so gilt*

$$\mathrm{Hom}(S,X) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(S',X)$$

für beliebiges X.

Beweis: a) Zur Monomorphie betrachte man das Diagramm $(*)$ aus dem Beweis von Proposition 2.3.1 genauer. Die Diagonale ist sogar eine abgeschlossene Immersion nach einem Nilideal. Dies überträgt sich auf den Basiswechsel $X' \to X$, welcher für reduziertes X dann ein Isomorphismus sein muß; f und g sind gleich.

b) Zur Epimorphie betrachte man

$$S' \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow S \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$$

mit reduziertem S. Die topologische Übereinstimmung von f und g ist evident, so daß man o.E. X als affin und damit separiert annehmen kann. Abbildungen zwischen reduziertem S und separiertem X sind aber gleich, wenn sie auf körperwertigen Punkten übereinstimmen. Dafür darf man aber Körpererweiterungen zulassen, und dies wird durch das surjektive $S' \twoheadrightarrow S$ punktweise geleistet. $\square$

Korollar. *Im Dächerkalkül der Morphismen von* TSch *kann man universelle Homöomorphismen in Diagrammen reduzierter Schemata stets beidseitig kürzen. Insbesondere ist der Funktor $\cdot(1)$ zur Basis T auf reduzierten T-Schemata treu.*

In der Kategorie Curv_k der glatten k-Kurven mit Morphismen als k-Schemata betrachte man die multiplikative Klasse k-Frob der Potenzen der relativen k-Frobenii. Sie erfüllt 1)'-3)', denn der Funktor $\cdot(1)$ zeigt 1)', die Proposition 2.3.2 behandelt 2)' und 3)' ist klar.

Definition. *Die an den relativen Frobenii lokalisierte Kategorie der k-Kurven sei*

$$\mathrm{FC}_k := [\text{k-Frob}]^{-1}\,\mathrm{Curv}_k \quad .$$

Proposition 2.3.3. *Der kanonische Funktor*

$$kan : \mathrm{FC}_k \longrightarrow \mathrm{TSch}\,/k$$

ist eine Äquivalenz auf eine volle Unterkategorie.

Beweis: Um die Wirkung des Funktors auf Homomorphismen zu beschreiben, muß man nur Rechtsdächer in Linksdächer transformieren, so daß das entstehende Quadrat kommutativ ist. Dies leistet das Faserprodukt.

$$kan : \quad \left(\begin{array}{ccc} C & & C' \\ & \searrow \;\; \swarrow\!\!\!\swarrow & \\ & C'(m) & \end{array} \right) \quad \mapsto \quad \left(\begin{array}{ccc} & C \times_{C'(m)} C' & \\ & \swarrow\!\!\!\swarrow \;\; \searrow & \\ C & & C' \end{array} \right)$$

treu: Angenommen ein Morphismus habe zwei Urbilder unter kan. Wir bringen beide Urbilder in FC_k auf den gleichen Nenner und bilden mit der Faserproduktkonstruktion ab. Es entstehen äquivalente Dächer, für die wir ein beide gleichzeitig dominierendes Dach suchen, resultierend in einem kommutativen Diagramm.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr] & \\ C \arrow[dr, Rightarrow] & & C' \arrow[dl, Rightarrow] \\ & C'(m) & \end{tikzcd}$$

C ist reduziert, gemäß Proposition 2.3.2 ist $X \Rightarrow C$ epimorph, und dies führt zu einem Widerspruch.

voll: Sei $\alpha = (C \Leftarrow X \to C')$ ein Morphismus in $\mathrm{TSch}\,/k$. Es ist C noethersch, deshalb beweist Proposition 2.2.3 für X die Gestalt $\varprojlim X_i$ mit $X_i \Rightarrow C$ endlichen universellen Homöomorphismen. Da C'/k von endlichem Typ ist, gibt es für ein hinreichend großes i ein α repräsentierendes $(C \Leftarrow X_i \to C')$. Nun wird aber X_i von der Normalisierung von C in einer endlichen rein inseparablen Funktionenkörpererweiterung von $k(C)$ dominiert und diese wiederum von C selbst mittels einer geeigneten Frobeniuspotenz. Dabei muß man die dominierende Kopie von C mit einer möglicherweise anderen, aber passenden k-Struktur versehen.

$$\alpha \quad \sim \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & C \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{Frob}_p^m"'] \arrow[dr, "f"] & \\ C & & C' \end{tikzcd}$$

Dieser Morphismus ist aber in $\mathrm{TSch}\,/k$ ebenso identisch mit:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] C \arrow[dr, "f"'] & & C' \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{Frob}_p^m"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

Bedenkt man die k-Linearität genau, so faktorisiert f zu

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dotted] \arrow[dr, "f"'] & C'(m) \arrow[d, Rightarrow] & C' \arrow[l, Rightarrow, "\text{k-Frob}^m"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{Frob}_p^m"] \\ & C' & \end{tikzcd}$$

und liegt demnach im Bild von kan. □

Die topologische Invarianz (Theorem 1) erlaubt, die diversen Fundamentalgruppenfunktoren über die entsprechenden Lokalisierungen zu faktorisieren. Dies zusammen mit der Charakterisierung der zahmen Fundamentalgruppe aus Proposition 1.5.2 führt zu ebenso benannten Funktoren

$$\pi_1, \pi_1^{tame} : \mathrm{FC}_k \longrightarrow \mathcal{G}_k \ .$$

Diese wollen wir studieren. Dazu kümmern wir uns um eine genauere Beschreibung der Morphismen in FC_k.

Lemma 2.3.4. *Sei $f : C \to C'$ eine dominante, nicht separable Abbildung von glatten k-Kurven. Dann faktorisiert f eindeutig über $C(1)$.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{k-Frob}"'] & C' \\ & C(1) \arrow[u, dotted] \end{tikzcd}$$

Beweis: Wir betrachten die Vervollständigung $f : X \to X'$ mittels der Dedekind-Weber Äquivalenz. Ein Funktionenkörper K/k besitzt genau einen k-Unterkörper, über dem er rein inseparabel vom Grad p ist. Denn ein solcher enthält kK^p, und darüber wird K erzeugt von einem für K/k separierenden transzendenten Element, demnach $[K : kK^p] = p$. Der Inklusion dieses Unterkörpers entspricht k-Frob, über den f somit faktorisiert. Die Einschränkbarkeit der Faktorisierung auf $C(1) \to C'$ ist nur eine topologische Frage, somit klar. □

In FC_k haben Morphismen eine eindeutige topologische Komponente. Es bezeichne Hom^{dom} dominante Abbildungen, separable dominante Abbildungen von k-Schemata erhalten die Notation Hom_k^{sep}.

Proposition 2.3.5. *Seien $C, C' \in \mathrm{FC}_k$. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}^{dom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') = \coprod_{\Delta \in \mathbb{Z}} \varinjlim_{m-m'=\Delta} \mathrm{Hom}_k^{sep}\big(C(m), C'(m')\big) \ ,$$

wobei der Limes über die Abbildungen des Funktors $\cdot(1)$

$$\mathrm{Hom}_k\big(C(m), C'(m')\big) \xrightarrow{\cdot(1)} \mathrm{Hom}_k\big(C(m+1), C'(m'+1)\big)$$

zu bilden ist und einer Vereinigung entspricht.

Beweis: Wir diskutieren die Äquivalenzrelation auf den Rechtsdächern, welche die Morphismen aus FC_k darstellen. Es treten als Nenner nur k-Frob^n auf. Proposition 2.3.2 zeigt, daß nur k-Frob^m zum Erweitern in Frage kommen, und Kürzen immer möglich ist. Mit dem vorangehenden Lemma erhält jeder dominante Morphismus eine Normalform

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, Rightarrow] & C' \arrow[d, Rightarrow] \\ C(m) \arrow[r, "f"] & C'(m') \end{tikzcd}$$

mit separablem f. Erweitert man mit k-Frob, so erhöhen sich m und m' je um eins und f ist durch $f(1)$ zu ersetzen. Die Multiplikativität des separablen Körpergrades weist $f(1)$ als separabel nach. Damit wird $\Delta = m - m'$ eine Invariante des Morphismus. Der Rest der Behauptung ergibt sich sofort. □

Definition. *Die Abbildung*

$$\Delta\text{-}Grad : \mathrm{Hom}^{dom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ordne jedem Morphismus seine Invariante Δ *zu.*

Korollar. *Seien* $C, C' \in \mathrm{FC}_k$*. Dann gilt*

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') = \coprod_{\Delta \in \mathbb{Z}} \varinjlim_{m - m' = \Delta} \mathrm{Isom}_k\big(C(m), C'(m')\big) \ .$$

Beweis: Da Morphismen in FC_k eine topologische Komponente haben, muß jeder Isomorphismus dominant sein. Mit der Normalform und Proposition 2.3.2 ergibt sich die Aussage direkt. □

Korollar. *Seien* C, C' *hyperbolische* k*-Kurven. Dann gilt*

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') = \coprod_{\Delta \geq 0} \mathrm{Isom}_k\big(C(\Delta), C'\big) \amalg \coprod_{\Delta < 0} \mathrm{Isom}_k\big(C, C'(-\Delta)\big) \ .$$

Beweis: Das Isom-Schema für hyperbolische Kurven ist endlich und unverzweigt [DM69, Thm 1.11.]. Daher gilt

$$\underline{\mathrm{Isom}}_k(C, C')(k) = \underline{\mathrm{Isom}}_k(C, C')(k^{1/p}) = \mathrm{Isom}_k\big(C(1), C'(1)\big) \ .$$

□

Korollar. $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}(C, C')$ *ist eine Garbe auf* $k_{\acute{e}t}$*, und* π_1^{tame} *setzt sich zu einer Garbenabbildung fort.*

$$\pi_1^{tame} : \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}_k}\big(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\big)$$

Beweis: Eine disjunkte Vereinigung von Garben ist eine Garbe. □

Korollar. *Sei* C *eine hyperbolische* k*-Kurve. Dann ist exakt:*

$$1 \to \mathrm{Aut}_k(C) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{FC}_k}(C) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z}$$

□

Zum Schluß dieses Kapitels sei darauf hingewiesen, daß die Dedekind-Weber Äquivalenz dazu benutzt werden kann, die Unterkategorie von FC_k der glatten Kurven mit dominanten Morphismen mit einer Kategorie von Funktionenkörpern zu vergleichen. Und zwar ist diese anti-äquivalent zur Kategorie der rein inseparablen Abschlüsse von Funktionenkörpern glatter k-Kurven mit der Auswahl einer endlichen Menge von k-Stellen mit separablen Restklassenkörpern und k-Abbildungen, welche diese Stellen respektieren.

Kapitel 3

Vorbereitungen

3.1 Die Resultate von A. Tamagawa

Die Arbeit [Tam97] läßt sich in zwei unabhängige Teile strukturieren, als deren Anwendung A. Tamagawa das Theorem 8 dieser Arbeit für Körper der Charakteristik 0 beweist.

3.1.1 Kurven über endlichen Körpern

Theorem 2 (Tam97, Thm 0.5). *Seien k_i für $i = 1, 2$ endliche Körper und seien C_i affine hyperbolische Kurven über k_i. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{Sch}}(C_1, C_2) \longrightarrow \mathrm{Isom}^{out}\left(\pi_1^{tame}(C_1), \pi_1^{tame}(C_2)\right)$$

bijektiv. Insbesondere ist C_1 isomorph zu C_2, falls $\pi_1^{tame}(C_1)$ isomorph ist zu $\pi_1^{tame}(C_2)$.

Der Plan zum Beweis dieses Theorems verläuft in etwa so. Man muß die Zerlegungsgruppen aller Stellen des Funktionenkörpers $k(C)$ der Kurve rekonstruieren. Diese codieren nach lokaler und globaler Klassenkörpertheorie die multiplikative Gruppe $k(C)^\times$. Die additive Struktur bekommt man durch trickreiche Überlegungen mit speziellen minimalen Funktionen, dem Wissen um die Bewertungsabbildungen auf $k(C)^\times$ und den Funktionswerten an den unendlich fernen Punkten.

Um an die Zerlegungsgruppen heranzukommen, charakterisiert Tamagawa diejenigen Schnitte von $\pi_1^{tame} \twoheadrightarrow G_k$, welche von rationalen Basispunkten inklusive der tangentialen stammen. Offensichtlich liefern rationale Punkte Schnitte:

$$\Big\{x \in C(k)\Big\} \longrightarrow \Big\{ \pi_1^{tame} \underset{\pi_1(x)}{\overset{}{\twoheadrightarrow}} G_k \Big\} .$$

Leider ist G_k aber pro-frei und so nicht jeder Schnitt geometrischen Ursprungs.

Die Schnittvermutung Grothendiecks fragt nach einer Charakterisierung der geometrischen Schnitte. Sie prognostiziert für endlich erzeugte unendliche Körper, daß diese zusammen mit den tangentialen Basispunkten schon alle Schnitte ausmachen [Gr83].

Kommt ein Schnitt von einem rationalen Punkt $x \in X$, so ist er die Zerlegungsgruppe eines Punktes $\hat{x}$ der universellen Überlagerung. Zerlegungstheorie beschreibt, daß das Bild von $\hat{x}$ in einer étalen Überlagerung von X rational ist, genau wenn die Zerlegungsgruppe in der definierenden Untergruppe der Überlagerung enthalten ist.

Ein solcher geometrischer Schnitt garantiert also in einem Teilsystem der étalen Überlagerungen die Existenz rationaler Punkte. Dieses Kriterium ist nach Tamagawa auch hinreichend. Das Hauptresultat hier ist

Theorem 3 (Tam97, Prop 0.7). *Für eine eigentliche hyperbolische Kurve X über einem endlichen Körper k gilt: ein Schnitt gehört zu einem rationalen Punkt $x \in X(k)$ genau dann, wenn jede étale Überlagerung $X_H \to X$ zu einer offenen Untergruppe $H < \pi_1$, die das Bild des Schnitts umfaßt, selbst noch rationale Punkte über k hat.*

Zum Beweis betrachte man [Fa98, Thm 3].

Über die Frage, ob eine Kurve über einem endlichen Körper rationale Punkte hat, gibt die Lefschetz-Spurformel Auskunft, deren Terme man als Spuren des Inversen zum Frobenius auf der Gruppencohomologie der geometrischen Fundamentalgruppe mit Werten in $\mathbb{Z}_l$ schreiben kann.

Wir wollen Theorem 2 mit den zuvor konstruierten Kategorien FC_k und $\mathcal{G}_k$ ausdrücken. Sei also $k = \mathbb{F}_q$. Dann haben wir eine perfekte Basis und so wird

$$C(1)/\mathbb{F}_q \cong \left(C \to \mathbb{F}_q \xrightarrow{\mathrm{Frob}^{-1}} \mathbb{F}_q\right) .$$

Setzen wir als Schema $C(1) = C$, so wird $\mathbb{F}_q$-Frob $= \mathrm{Frob}_p : C \to C$ und $f(1) = f$.

Definition. *Wir definieren einen Funktor*

$$\begin{array}{cccccc} S & : & \mathrm{FC}_{\mathbb{F}_q} & \longrightarrow & \mathrm{Sch} \\ & & C/\mathbb{F}_q & \longmapsto & C \\ & & \left(\begin{array}{ccc} C & & C' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ C(m) & \xrightarrow[f]{} & C'(m') \end{array}\right) & \longmapsto & (f : C \to C') \end{array}$$

für Morphismen in Normalform mit separablem f.

Dieser Funktor wird nicht vom Vergiß-funktor durch die universelle Eigenschaft der Lokalisierung induziert, auch wenn dieser auf den ersten Blick als ein natürlicher Kandidat erscheint. Wir bemühen Propositon 2.2.1, um trotzdem den Fundamentalgruppenfunktor zu faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{FC}_{\mathbb{F}_q} & \xrightarrow{\pi_1^{tame}} & \mathcal{G}_{\mathbb{F}_q} \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle V} \\ \mathrm{Sch} & \xrightarrow[\pi_1^{tame}]{} & \mathcal{G}^{ext} \end{array} .$$

Dabei vergesse der Funktor V von Extensionen alles bis auf den mittleren Term.

Das Funktordiagramm läßt sich auf eine Betrachtung von Isomorphismen spezialisieren.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_{\mathbb{F}_q}}(C, C') & \xrightarrow{\pi_1^{tame}} & \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \\ {\scriptstyle S}\twoheaddownarrow & & \twoheaddownarrow{\scriptstyle V} \\ \mathrm{Isom}_{\mathrm{Sch}}(C, C') & \xrightarrow[\pi_1^{tame}]{\sim} & \mathrm{Isom}^{out}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind surjektiv. Für S gilt dies mit [Tam97, Lemma 4.2], weil Frob_p die Galoisgruppe eines endlichen Körpers über $\mathbb{F}_p$ erzeugt.

Bei V bemühe man [Tam97, Prop 3.3, 3.4]. Diese Propositionen besagen, daß die Extension $\pi_1^{tame}(C)$ schon in der pro-endlichen Gruppe $\pi_1^{tame}(C)$ codiert ist, und die Isomorphismen aus $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}$ sich nur von denjenigen aus $\mathcal{G}^{ext}$ durch eine schwächere Äquivalenzrelation auf der Menge der Gruppenisomorphismen unterscheiden.

In den vertikalen Abbildungen wird wegen der Funktorialität genau die Aktion der Urbilder der Identitäten herausgeteilt. Da Morphismen in $\mathrm{FC}_{\mathbb{F}_q}$ aber $\mathbb{F}_q$-linear sein müssen, haben wir

$$S^{-1}\{id\} = \langle \mathrm{Frob}_q \rangle \cong \mathbb{Z} .$$

Auf der Gruppenseite gilt:

Proposition 3.1.1. *Sei C=(X,D) eine hyperbolische $\mathbb{F}_q$-Kurve. Dann ist*

$$V^{-1}\{id\} = G_{\mathbb{F}_q} \cong \hat{\mathbb{Z}} .$$

Beweis: Die äußere Galoisdarstellung faktorisiert als

$$\rho_C : G_{\mathbb{F}_q} \twoheadrightarrow \mathrm{Inn}\left(\pi_1^{tame}(C)\right) / \,\mathrm{Inn}\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)\right) \xrightarrow{()|_{\overline{\pi}_1^{tame}}} \mathrm{Out}\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)\right) .$$

Der mittlere Term beschreibt den Quotienten derjenigen Gruppen, durch welche die Äquivalenzrelationen für Morphismen in $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}$ bzw. $\mathcal{G}^{ext}$ auf der Menge der Gruppenhomomorphismen gegeben wird. Er stimmt mit $V^{-1}\{id\}$ überein. Zu zeigen ist somit folgender Satz. $\square$

Satz 3.1.2. *Sei C=(X,D) eine glatte $\mathbb{F}_q$-Kurve mit $\chi_C \leq 0$. Dann ist die äußere Galoisdarstellung treu:*

$$\rho_C : G_{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow \mathrm{Out}\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)\right) .$$

Beweis: Es ist $G_{\mathbb{F}_q}$ torsionsfrei, deshalb ohne Einschränkung D eine Summe rationaler Punkte. Sei Jac_C die generalisierte Jacobische zum Modul D auf X. Die Abbildung der Kurve in diese induziert auf der Fundamentalgruppe einen Isomorphismus

$$\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)\right)^{ab} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}\,\mathrm{Jac}_C$$

von G_k-Moduln [Ser59], denn der p-Anteil kommt sogar schon von Jac_X.

Verlängere die Operation nach $\mathrm{Aut}(\mathrm{T}\,\mathrm{Jac}_C)$ und wende auf Jac_C die folgende Proposition an. □

Proposition 3.1.3. *Sei $G/\mathbb{F}_q$ ein kommutatives Gruppenschema von endlichem Typ und positiver Dimension. Dann ist die zugehörige Galoisdarstellung treu:*

$$\rho_G : G_{\mathbb{F}_q} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{T}\,G) .$$

Beweis: Via Galoiskorrespondenz entspricht $\ker(\rho_G)$ dem Kompositum der Restklassenkörper aller Torsionspunkte. Alle abgeschlossenen Punkte eines Gruppenschemas von endlichem Typ über $\mathbb{F}_q$ sind Torsionspunkte, denn $G(\mathbb{F}_{q^r})$ ist endlich. Zu betrachten sind deshalb alle abgeschlossenen Punkte von G.

Das Kompositum der Restklassenkörper aller abgeschlossenen Punkte eines Schemas von endlichem Typ positiver Dimension über $\mathbb{F}_q$ ist $\overline{\mathbb{F}}_p$, denn darin enthalten ist eine affine Kurve, welche surjektiv über einem offenen Teil des $\mathbb{P}^1$ liegt. Die Behauptung ist aber klar für offene Teile des $\mathbb{P}^1$, wird von Surjektionen vererbt, und es reicht natürlich ein Unterschema zu betrachten. □

Es ist also π_1^{tame} injektiv und im Sinn von $\mathbb{Z} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ dicht auf Isomorphismen von $\mathrm{FC}_{\mathbb{F}_q}$ nach $\mathcal{G}_{\mathbb{F}_q}$. Dies paßt zusammen mit der kanonischen pro-endlichen Topologie auf den Isom-Mengen. Zur Konstruktion der Topologie beschränke man sich auf pro-endliche Gruppen P von endlichem Korang. Auf diesen hat man funktoriell endliche Gruppen $Q_n(P)$, dem Qotienten nach dem Schnitt aller endlich vielen offenen Untergruppen, deren Index n nicht übersteigt. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(P,P') &= \varprojlim_n \mathrm{Hom}\left(Q_n(P), Q_n(P')\right) \\ \mathrm{Isom}(P,P') &= \varprojlim_n \mathrm{Isom}\left(Q_n(P), Q_n(P')\right) \end{aligned}$$

mit stetiger Komposition von Morphismen. Aus einer stetigen Sequenz

$$1 \to \bar{P} \to P \to G \to 1$$

mit Kern $\bar{P}$ von endlichem Korang entwächst eine stetige Operation von P auf $\bar{P}$ durch Konjugation. Insbesondere hat man eine abgeschlossene Äquivalenzrelation auf den Homomorphismen durch Komposition mit inneren Automorphismen. Die äußere Operation

$$G \to \mathrm{Out}(\bar{P})$$

wird somit stetig. Für abelsche G, etwa $G_{\mathbb{F}_q}$, operiert damit G stetig auf

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}^{ext}(G)}(\bar{P}, \bar{P}')$$

durch Translation. Nun verwende man noch die Äquivalenz aus Satz 1.3.2.

3.1.2 Gute Reduktion und die Spezialisierungsabbildung

Möchte man die Resultate bei endlichem Konstantenkörper für allgemeinere Situationen nutzbar machen, so hat man sich um das Verhalten von π_1^{tame} unter Spezialisierung zu kümmern. Die Situation ist wie folgt: Man hat einen diskreten Bewertungsring R mit generischem Punkt $\eta = \mathrm{Spec}(K)$ und abgeschlossenem Punkt $s = \mathrm{Spec}(k)$. Die Trägheitsgruppe von $s \in \mathrm{Spec}(R)$ sei I.

Wir sagen, daß eine glatte K-Kurve $C = (X, D)$ gute Reduktion an s hat, falls es eine glatte R-Kurve $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{D})$ gibt, deren generische Faser isomorph ist zu C. Falls es sich um eine hyperbolische Kurve handelt, so ist ein solches glattes Modell $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ eindeutig [DM69, Kn83], falls es überhaupt existiert. Zur Existenz gibt uns π_1^{tame} folgende Auskunft:

Theorem 4 (Tam97, Thm 5.3). *Sei $C = (X, D)/K$ eine hyperbolische Kurve. Dann sind äquivalent:*

(i) (X, D) hat gute Reduktion in s.

(ii) Das Bild von I in $\mathrm{Out}\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)^{p'}\right)$ ist trivial.

(iii) Für jede Primzahl $l \neq p$ ist das Bild von I in $\mathrm{Out}\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)^{l}\right)$ trivial.

(iv) Es gibt $l \neq p$ prim, so daß das Bild von I in $\mathrm{Out}\left(\overline{\pi}_1^{tame}(C)^{l}\right)$ trivial ist.

Im Hinblick auf dieses Ergebnis und eine Version für gute Reduktion abelscher Varietäten hat man die Trägheitsgruppe I als die lokale Monodromiegruppe um den Punkt s herum anzusehen, die trivial operieren muß, will man eine Familie in diesen Punkt hinein fortsetzen können.

Im Beweis des Kriteriums ist wegen [SGA 1, XIII] nur (iv) $\Rightarrow$ (i) interessant. Man reduziert mit Abstiegstheorie auf den Fall R strikt henselsch, weist für die Jacobische das Kriterium guter Reduktion nach und zeigt, daß der Divisor D schon aus K-rationalen Punkten besteht. Somit hat man ein stabiles Modell. Nach minimalem Aufblasen wird dieses regulär mit einem Baum als dualen Graphen der speziellen Faser. Mit einer geschickt gewählten Überlagerung und der Kombinatorik der Komponenten der speziellen Faser kann man zeigen, daß dieser Baum nur eine Ecke hat.

Sei nun R henselsch und habe die hyperbolische Kurve $C = (X, D)$ gute Reduktion bei s. Sei $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{D})$ das glatte Modell und $\mathcal{C}_s = (\mathcal{X}_s, \mathcal{D}_s)$. Eine gruppentheoretische Charakterisierung der Spezialisierungsabbildung erhalten wir aus

Theorem 5 (Tam97, Thm. 5.7). *Sei H eine offene normale Untergruppe von $\pi_1^{tame}(C)$. Es enthält H den Kern der Spezialisierungsabbildung*

$$sp : \pi_1^{tame}(C) \twoheadrightarrow \pi_1^{tame}(\mathcal{C}_s)$$

genau dann, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

(i) Das Bild von H in G_K enthält I.

(ii) Das Bild von I in $\mathrm{Out}(\overline{H}^{p'})$ ist trivial, wobei $\overline{H} = H \cap \overline{\pi}_1^{tame}(C)$.

Es stimmt $\ker(sp)$ mit dem Schnitt aller offenen Normalteiler H, welche (i) und (ii) genügen, überein.

Dies folgt im wesentlichen aus dem Kriterium für gute Reduktion in Anwendung auf Überlagerungen bei guter Reduktion von Basis und Totalraum.

Eine bessere Beschreibung der „gruppentheoretischen Charakterisierung“ besteht in der folgenden Spezialisierungsabbildung für Isomorphismen.

Proposition 3.1.4. *Jeder Isomorphismus in $\mathcal{G}_K$ überträgt sich vermöge sp kanonisch auf einen Isomorphismus der Spezialisierungen in $\mathcal{G}_k$.*

$$sp : \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_K}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(\mathcal{C}_s), \pi_1^{tame}(\mathcal{C}'_s)\right)$$

Beweis: Klar. Beachte, daß sp bis auf innere Automorphismen aus $\overline{\pi}_1^{tame}(\mathcal{C}_s)$ definiert ist. Dafür muß man allerdings die beteiligten Basispunkte im Diagramm $C \to \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C}_s$, aus dem sp durch Anwendung von π_1^{tame} hervorgeht, jeweils mit einer $\overline{K} \leftarrow R^{sh} \to \overline{k}$ Struktur betrachten. Dann argumentiert man analog zum Lemma 1.2.1. $\square$

3.2 Levelstruktur und Modulraum

Um sich der Arbeit mit Stacks zu verweigern, statte man Kurven mit Levelstrukturen aus und betrachte deren feinen Modulraum.

Definition. *Ein glatter eigentlicher Morphismus $p : \mathcal{X} \to T$, dessen geometrische Fasern irreduzible Kurven sind, heiße relative Kurve. Sie hat das Geschlecht g, wenn dies für alle Fasern gilt.*

Sei n invertierbar auf T. Dann ist $R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}}$ lokalkonstante Torsionsgarbe auf T [SGA $4\frac{1}{2}$, Arcata V Thm 3.1], étale lokal isomorph zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T^{2g}$ [SGA $4\frac{1}{2}$, Arcata III Kor 3.5].

Definition. *Gilt dies schon global über T, so heiße die Wahl eines Isomorphismus*

$$R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_T^{2g}$$

n-Levelstruktur auf $p : \mathcal{X} \to T$.

Ist $R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}}$ konstant und T zusammenhängend, so reicht es schon, eine Levelstruktur auf einem Halm anzugeben. Das Theorem über den Basiswechsel der höheren direkten Bilder von Torsionsgarben bezüglich eigentlicher Morphismen [SGA $4\frac{1}{2}$, Arcata IV Thm 1.1] ermöglicht einen Pullback von Levelstrukturen. In der Tat hat auch ein Basiswechsel wieder ein konstantes erstes direktes Bild, und dessen Halme sind kanonisch isomorph zu Halmen von $R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}}$. Wir erhalten demnach einen Funktor $\mathcal{M}_g[n]$, über den folgendes gilt:

Theorem 6. *Seien $n \geq 3$ und $g \geq 2$. Der kontravariante Funktor auf* $\mathrm{Sch}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]}$

$$\mathcal{M}_g[n] : T \mapsto \left\{ \begin{array}{c} \textit{Isomorphieklassen von relativen Kurven } \ \mathcal{X} \to T \\ \textit{vom Geschlecht } g \textit{ mit } n\textit{-Levelstruktur} \end{array} \right\}$$

wird durch ein über $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right])$ *glattes Schema dargestellt.*

Beweis: [DM69, Prop 5.8] mit $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ beweist für $\mathcal{M}_g[n]$ die Struktur eines glatten Deligne-Mumford Stacks. [DM69, 5.14] und [Ser61] zeigen, daß bereits ein Schema vorliegt. □

Es entspricht $id_{\mathcal{M}_g[n]}$ der universellen Kurve mit Levelstruktur, $\mathcal{C}_g[n]$, aus der alle anderen eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie als Basiswechsel mit der klassifizierenden Abbildung entstehen. Die Konstruktion des Frobeniustwists als Pullback läßt diesen auch auf relative Kurven mit Levelstruktur wirken. Die Transitivität des Pullback erklärt für ein Schema T über $\mathbb{F}_p$ und eine klassifizierende Abbildung $f : T \to \mathcal{M}_g[n]$ die Gleichheit von

$$(f \circ \mathrm{Frob}_p)^* \mathcal{C}_g[n] \cong Frob_p^* \circ f^* \mathcal{C}_g[n] \cong \big(f^* \mathcal{C}_g[n]\big)(1) \ ,$$

demnach

$$\cdot(1) = (\ \circ \mathrm{Frob}_p) \ : \ \mathcal{M}_g[n](T) \longrightarrow \mathcal{M}_g[n](T) \ .$$

Wir übertragen nun diese Zusatzstruktur auf die Fundamentalgruppe. Sei X eine glatte eigentliche k-Kurve. Es trägt $\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n$ eine G_k-Modulstruktur, welche von der äußeren Galoisoperation auf $\overline{\pi}_1(X)$ induziert wird und étale lokal isomorph ist zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ mit trivialer Operation.

Definition. *Gilt dies schon global über k, so heiße die Wahl eines Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

n-Levelstruktur auf $\pi_1(X)$. Wir schreiben für eine abelsche Gruppe G vom Exponenten n auch $G^\vee$ für $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Der Begriff der Levelstruktur auf $\pi_1(X)$ korrespondiert mit dem einer Levelstruktur auf $p : X \to k$. Denn zunächst gilt auf der Kategorie der Schemata

$$\left(\pi_1(\cdot)^{ab}/n\right)^\vee \cong H^1(\cdot, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \ ,$$

weil beide Funktoren $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Torsore beschreiben. Dies setzt sich fort auf die induzierten Funktoren der G_k-Darstellungskategorien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sch}_k \arrow[r] & \mathrm{Sch}(G_k) \arrow[r, bend left, "(\pi_1(\cdot)^{ab}/n)^\vee"] \arrow[r, bend right, "H^1(\cdot, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})"'] & \mathcal{A}b(G_k) \end{tikzcd} \ ,$$

wobei man der Kontravarianz durch das Inversennehmen in G_k begegnet. Damit ist

$$\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n\right)^\vee \cong R^1 p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_X \tag{$*$}$$

ein natürlicher Isomorphismus von G_k-Moduln.

Bemerkung. *Levelstrukturen lassen sich auf der Torsion der Jacobischen der Kurve angeben. Denn es gibt einen Isomorphismus von G_k-Moduln*

$$\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n \cong \mathrm{Jac}_X[n] \ ,$$

und diese sind freie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Moduln. Später in der Arbeit wird dieser Standpunkt eingenommen werden.

Lemma 3.2.1. *Sei $\mathrm{char}(k) = p$ und X/k eine glatte Kurve mit n-Levelstruktur. Dann erhält der Frobeniustwist $X(1)/k$ als Pullback diejenige Levelstruktur, welche durch den Isomorphismus $\pi_1(\text{k-Frob})$ transportiert wird.*

Beweis: Sei $\varphi : X(1) \to X$ die Projektion. Für Garben $\mathcal{F}$ auf $k_{ét}$ (oder allgemeiner $T_{ét}$) gilt kanonisch

$$\mathrm{Frob}_p^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \ .$$

Deshalb wird im Folgenden die Operation Frob_p^* auf den Garben ignoriert. Es kommutiert wegen der Natürlichkeit des Isomorphismus in $(*)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^1(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi_{\overline{k}}^*", "\sim"'] \arrow[d, equal] & H^1\big(X(1)_{\overline{k}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big) \arrow[d, equal] \\ \big(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n\big)^\vee \arrow[r, "\circ\pi_1(\varphi_{\overline{k}})", "\sim"'] & \big(\overline{\pi}_1(X(1))^{ab}/n\big)^\vee \end{tikzcd} .$$

Dabei ist $\varphi_{\overline{k}}^*$ der Isomorphismus aus dem Theorem vom eigentlichen Basiswechsel und damit verantwortlich für den Transport der Levelstrukturen. Es bleibt zu zeigen, daß

$$\pi_1(\varphi_{\overline{k}})|_{\overline{\pi}_1(X(1))^{ab}/n} = \overline{\pi}_1(\text{k-Frob})^{-1}|_{\overline{\pi}_1(X(1))^{ab}/n} \quad .$$

In $\mathcal{G}^{ext}$ ist $\pi_1(\mathrm{Frob})$ trivial nach Proposition 2.2.1, daher in $\mathcal{G}_k$ immerhin die Konjugation mit einem Element aus π_1. Da es sich um eine Kurve mit Levelstruktur handelt, ist dieser Automorphismus trivial auf $\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n$. Denkt man an das definierende Diagramm für relative Frobenii aus Abschnitt 2.2, so folgt aus

$$\pi_1(\varphi_{\overline{k}}) \circ \overline{\pi}_1(\text{k-Frob}) = \pi_1(\mathrm{Frob} \times id_{\overline{k}}) = \pi_1(\mathrm{Frob})|_{\overline{\pi}_1}$$

die Behauptung. □

Sei $p : \mathcal{X} \to T$ eine relative Kurve mit n-Levelstruktur und $\bar{t}$ ein geometrischer Punkt zu $t \in T$. Auf der Faser $\mathcal{X}_t$ wird die induzierte Levelstruktur via

$$\big(R^1p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}}\big)_{\bar{t}} \cong H^1(\mathcal{X}_{\bar{t}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

gegeben. Hieraus ergibt sich eine Spezialisierung von Levelstrukturen in folgender Situation.

Sei T das Spektrum eines henselschen diskreten Bewertungsrings R mit generischem Punkt η und abgeschlossenem Punkt s. Sei R^{sh} eine strikte Henselisierung, $\bar{s}$ ihr abgeschlossener und $\bar{\eta}$ ein geometrischer Punkt über dem generischen. Für eine relative Kurve $p : \mathcal{X} \to T$ mit n-Levelstruktur reicht es, diese auf

$$H^1(\mathcal{X}_{R^{sh}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \big(R^1p_*(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathcal{X}}\big)(R^{sh})$$

anzugeben. Die Abbildungen

$$\mathcal{X}_{\bar{\eta}} \xrightarrow{j} \mathcal{X}_{R^{sh}} \xleftarrow{i} \mathcal{X}_{\bar{s}}$$

führen zur Kospezialisierung [SGA $4\frac{1}{2}$, Arcata V (1.6.1) & Thm 3.1]

$$cosp^* : \ H^1(\mathcal{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xleftarrow{j^*} H^1(\mathcal{X}_{R^{sh}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} H^1(\mathcal{X}_{\bar s}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \ ,$$

welche ein Isomorphismus ist und damit erlaubt, das Datum einer n-Levelstruktur in der generischen Faser nach der speziellen Faser zu transportieren.

Lemma 3.2.2. *In dieser Situation wird der entsprechende Transport der Levelstrukturen auf den Fundamentalgruppen durch die Spezialisierungsabbildung realisiert.*

Beweis: Nach Definition von $cosp^*$ und $\bar{sp} = \pi_1(i)^{-1} \circ \pi_1(j)$ ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{cosp^*} & H^1(\mathcal{X}_{\bar s}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ \| & & \| \\ (\overline{\pi}_1(\mathcal{X}_\eta)^{ab}/n)^\vee & \xrightarrow[\sim]{\circ \bar{sp}} & (\overline{\pi}_1(\mathcal{X}_s)^{ab}/n)^\vee \ . \end{array}$$ □

Das folgende Lemma rechtfertigt die Betrachtung von Levelstrukturen, denn es beschreibt, daß diese in den uns interessierenden Fällen ein rein gruppentheoretisches Datum darstellen. Sie können aus der zahmen Fundamentalgruppe einer glatten, nicht notwendig eigentlichen Kurve abgelesen werden.

Lemma 3.2.3. *Sei k ein endlich erzeugter Körper und $C = (X, D)$ eine glatte k-Kurve. Sei $n \in \mathbb{N}$ invertierbar in k. Dann ist in $\mathcal{G}_k$*

$$\pi_1^{tame}(C) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \supseteq \overline{\pi}_1(X) \twoheadrightarrow \overline{\pi}_1(X)^{ab}/n$$

gruppentheoretisch codiert, d.h. alle Isomorphismen setzen sich kanonisch fort auf die Subquotienten:

$$\mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \to \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}[G_k]}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n\right) \ .$$

Beweis: Proposition 1.5.4 für den ersten Schritt, der Rest ist sogar ein Funktor. □

Man betrachte daraufhin insbesondere den Gehalt des Lemmas 3.2.2 im Kontext des Spezialisierens von Fundamentalgruppenisomorphismen aus Proposition 3.1.4. Ist ein Isomorphismus der Fundamentalgruppen der generischen Kurven kompatibel mit gewählten Levelstrukturen, so trifft dies auch für seine Spezialisierung in Bezug auf die spezialisierten Levelstrukturen zu. Es sind nämlich im folgenden Würfeldiagramm, dessen vertikale Abbildungen Subquotienten beschreiben, alle Seiten bis auf den Boden kommutativ, somit auch dieser.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1^{tame}(\mathcal{C}_\eta) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "sp", two heads] \arrow[dd, hook, two heads] & & \pi_1^{tame}(\mathcal{C}'_\eta) \arrow[dr, "sp", two heads] \arrow[dd, hook, two heads] & \\
& \pi_1^{tame}(\mathcal{C}_s) \arrow[rr, dotted, "\sim"] \arrow[dd, hook, two heads] & & \pi_1^{tame}(\mathcal{C}'_s) \arrow[dd, hook, two heads] \\
\overline{\pi}_1(\mathcal{X}_\eta)^{ab}/n \arrow[rr, dotted, "\sim"] \arrow[dr, "\sim", "\overline{sp}"'] & & \overline{\pi}_1(\mathcal{X}'_\eta)^{ab}/n \arrow[dr, "\sim", "\overline{sp}"'] & \\
& \overline{\pi}_1(\mathcal{X}_s)^{ab}/n \arrow[rr, dotted, "\sim"] & & \overline{\pi}_1(\mathcal{X}'_s)^{ab}/n
\end{tikzcd} .$$

Hierin bezeichne wie üblich $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{D})$ sowie $\mathcal{C}' = (\mathcal{X}', \mathcal{D}')$ glatte Kurven über einem henselschen diskreten Bewertungsring $\mathrm{Spec}(R) = \{\eta, s\}$.

Wir übersetzen nun [Ser61] in unsere Situation und erhalten ein Rigiditätstheorem für Morphismen in FC_k. Im Vorgriff auf Abschnitt 3.4 heiße eine Kurve X/k nicht konstant, wenn es kein $X_0/\overline{\mathbb{F}}_p$ gibt, so daß $X_{\overline{k}} \cong X_0 \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{k}$.

Satz 3.2.4. *Sei $g \geq 2$ und $n \geq 3$ prim zur Charakteristik. Seien X, X' nicht konstante, eigentliche k-Kurven. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(X, X') \hookrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}[G_k]}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n\right)$$

injektiv.

Beweis: Wegen der Funktorialität beider Seiten reicht es, $X = X'$ und Urbilder der Identität zu untersuchen. Ohne Einschränkung erlaube X eine n-Levelstruktur, denn $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}$ ist étale Garbe. Wähle auf X eine n-Levelstruktur, ebenso damit auf $X(m)$ die kanonisch induzierte. Es bezeichne i_X die klassifizierende Abbildung von X. Ein Automorphismus von X in FC_k wird im wesentlichen durch einen Isomorphismus

$$\phi : X(m) \xrightarrow{\sim} X(m')$$

gegeben. Induziert er die Identität auf $\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n$, so sind $X(m)$ und $X(m')$ isomorph als Kurven mit Levelstruktur. Daher sind ihre klassifizierenden Abbildungen identisch:

$$i_X \circ \mathrm{Frob}_p^m = i_X \circ \mathrm{Frob}_p^{m'} \quad .$$

Damit ist das Bild von i_X entweder ein abgeschlossener Punkt, somit X eine konstante Kurve, oder $m = m'$. Letzteres versetzt uns in die Lage, den folgenden Satz auf den von ϕ induzierten Automorphismus der Jacobischen zu $X(m)$ anzuwenden. In der Tat hat ϕ endliche Ordnung, denn $X(m)$ ist hyperbolisch. $\square$

Satz 3.2.5 (Serre). *Sei A/k eine abelsche Varietät und $u \in \mathrm{Aut}_k(A)$ endlicher Ordnung. Sei $n \geq 3$ und u trivial auf der n-Torsion.*

$$u|_{A[n]} = id_{A[n]}$$

Dann ist u bereits die Identität.

Beweis: [Ser61] □

Korollar. *Seien $C = (X, D)$ und $C' = (X', D')$ glatte k-Kurven vom Geschlecht ≥ 2 und nicht konstanten X, X'. Dann ist $\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C')$ leer oder es gibt ein eindeutiges $\Delta \in \mathbb{Z}$ mit:*

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') = \begin{cases} \mathrm{Isom}_k\big(C(\Delta), C'\big) & \Delta \geq 0 \\ \mathrm{Isom}_k\big(C, C'(-\Delta)\big) & \Delta < 0 \end{cases}$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $C = C'$. Es ist

$$\mathrm{Aut}_{\mathrm{FC}_k}(C) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathrm{FC}_k}(X)$$

und nach Satz 3.2.4 endlich. Damit ist Δ-Grad$\big(\mathrm{Aut}_{\mathrm{FC}_k}(C)\big)$ eine endliche Untergruppe von $\mathbb{Z}$, somit konstant 0. □

Dies steht im Gegensatz zum Verhalten konstanter Kurven, die stets isomorph sind zu einem ausreichend hohen Frobeniustwist ihrerselbst.

3.3 Topologisch gleiche Morphismen

Lemma 3.3.1. *Sei X irreduzibel, reduziert, separiert, von endlichem Typ/$\mathbb{Z}$, und die Abbildung $X \to \mathbb{Z}$ habe dichtes Bild. Dann ist*

$$X_{0,prim} = \{x \in X | \kappa(x) = \textit{endlicher Primkörper}\}$$

Zariski-dicht in X.

Beweis: Im eindimensionalen Fall sagt uns der Satz von Čebotarev, daß $X_{0,prim}$ unendlich, sein Abschluß also ganz X ist.

Für beliebige X betrachtet man $x \in (X_{\mathbb{Q}})_0$, die abgeschlossenen Punkte der generischen Faser. Dies sind generische Punkte eindimensionaler Unterschemata von X, welche dicht über $\mathbb{Z}$ liegen, somit im Abschluß von $X_{0,prim}$. Damit enthält dieser auch den Abschluß aller abgeschlossenen Punkte der generischen Faser $X_{\mathbb{Q}}$, welche dicht sind in dieser. Der generische Punkt von X liegt aber in der generischen Faser. □

Theorem 7 (Lang-Weil). *Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über einem Körper k mit q Elementen. Dann gibt es $c > 0$ mit*

$$X(\mathbb{F}_{q^r}) = c \cdot q^{\dim(X)\cdot r}\left(1 + \mathcal{O}(q^{-\frac{1}{2}r})\right) \qquad \textit{für} \;\; r \to \infty \; .$$

Beweis: Für projektive, geometrisch irreduzible X leistet [LW54, Thm 1] das Gewünschte. Auf diesen Fall führen wir die Aussage zurück.

Aus der Rationalität der Zetafunktion zu X/k wissen wir, daß sich

$$X(\mathbb{F}_{q^r}) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}^r$$

mit den Eigenwerten $\alpha_{i,j}$ des Frobenius auf $H_c^i(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_l)$ berechnet. Wir können also o.E. eine endliche Konstantenkörpererweiterung vornehmen mit dem Ziel, alle geometrischen irreduziblen Komponenten k-rational zu bekommen. Induktion über $\dim(X)$ erlaubt, sich auf eine Komponente zu beschränken, da paarweise Schnitte von niedrigerer Dimension sind. Das gleiche Argument begründet die Reduktion auf offene affine dichte Teile bzw. deren Abschluß in einer Einbettung nach $\mathbb{P}_k^n$. □

Satz 3.3.2 (topologisch gleiche Morphismen). *Seien X, Y separierte Schemata von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$, dabei X irreduzibel und reduziert. Seien f, g zwei Morphismen $X \to Y$, deren topologische Komponente auf den abgeschlossenen Punkten der zugrundeliegenden topologischen Räume identisch sind.*
Dann gilt entweder $f = g$ oder andernfalls $X/\mathbb{F}_p$ und es gibt $m \in \mathbb{Z}$, so daß $f = g \circ Frob_p^m$ als Morphismen von $[Frob_p]^{-1}\, Sch_{\mathbb{F}_p}$.

Zusatz. *Es ist der Exponent $m \in \mathbb{Z}$ eindeutig gdw. f und g nicht konstant sind.*

Beweis: Das Bild von $X \to \mathbb{Z}$ ist konstruktibel, somit dicht oder $\mathbb{F}_p$. Der Ort der Punkte, an denen f und g als Schemamorphismen übereinstimmen, ist abgeschlossen und enthält $X_{0,prim}$. Damit reduziert uns das einleitende Lemma auf den Fall $X/\mathbb{F}_p$, und alles findet nun über $\mathbb{F}_p$ statt.

Wir reduzieren zunächst auf den Fall X affin und $Y = \mathbb{A}^n$. Sei dazu $V \subseteq Y$ eine offene affine Umgebung eines abgeschlossenen Punktes im Bild von f, somit auch von g. Damit ist $f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ nicht leer und enthält ein offenes affines U. Wähle noch eine abgeschlossene Einbettung $V \hookrightarrow \mathbb{A}^n$. Die Voraussetzungen X reduziert, Y separiert erlauben, sich auf $f|_U, g|_U \in \mathrm{Hom}(U, \mathbb{A}^n)$ zu beschränken.

Offensichtlich reichen für nicht konstante f, g die Fälle $n = 1$ (Verkettung mit Projektionen $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$) und $n = 2$ (Vergleich zweier solcher Projektionen) aus, wenn man um die Eindeutigkeit des Exponenten m weiß und einen geeigneten Automorphismus des $\mathbb{A}^n$ verwendet (Scherung mit einer Koordinate, deren Komponente der Abbildungen nicht konstant ist).

Deshalb überlegt man sich schnell den Zusatz. In der einen Richtung nützt man aus, daß die Galoisgruppe für endliche Körper vom Frobenius erzeugt wird, ein Exponent aber bis auf ein Vielfaches der Gruppenordnung bestimmt ist. Hat man hingegen die Wahl zwischen mehreren Exponenten m_1, m_2, so folgen in lokalen Koordinaten $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{A}^n$ Gleichungen $f_i = f_i^{p^m}$, welche den Morphismus über einen endlichen Körper faktorisieren lassen, ergo konstant machen. Ab jetzt seien daher f und g nicht konstant.

Wir beweisen nun zunächst den Fall $\dim X = 1$, affin. Wähle $X \subseteq \mathbb{A}^N$ und betrachte den Graphen von $(f, g) : X \to \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$

$$\Gamma = \Gamma_{(f,g)} \subseteq X \times \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{A}^{N+2n} .$$

Es bezeichne $(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $(y_1, \ldots, y_n)$ die Koordinaten des ersten bzw. zweiten $\mathbb{A}^n$. Für $m \in \mathbb{Z}$ definiere:

$$R_m := \begin{cases} V(x_i = y_i^{p^m},\ 1 \leq i \leq n) & m \geq 0 \\ V(x_i^{p^{-m}} = y_i,\ 1 \leq i \leq n) & m < 0 \end{cases}$$

Die behauptete Morphismenrelation $f = g \circ \mathrm{Frob}_p^m$ wird mit diesen Bezeichnungen äquivalent zu $\Gamma \subseteq R_m$.

Angenommen f und g erfüllten für kein $m \in \mathbb{Z}$ eine solche Relation, so sind die Schnitte $\Gamma \cap R_m$ null dimensional für alle m. Es reicht sogar aus, mit nur einer Hyperfläche

$$H_m = V\big(x_{i_m} = y_{i_m}^{p^m}\big)$$

für einen geeigneten Index i_m zu schneiden, um einen null dimensionalen Schnitt zu erhalten. Weiter gilt

$$\Gamma(\mathbb{F}_{p^{2r+1}}) \subseteq \bigcup_{m=-r}^{r} \big(\Gamma \cap H_m\big)(\mathbb{F}_{p^{2r+1}}) ,$$

denn an jedem abgeschlossenen Punkt vom Grad $2r+1$ erzwingt die topologische Übereinstimmung eine Relation mit $|m| \leq r$. Es stellen nämlich genau diejenigen $\mathbb{F}_q$-Punkte den gleichen topologischen Punkt dar, deren Koordinatentupel uniform konjugiert sind unter der Operation von $G_{\mathbb{F}_p}$.
Nun zählen wir. Auf der linken Seite haben wir für $r \to \infty$ asymptotisch

$$\#\mathrm{LHS} = \mathrm{const} \cdot p^{2r+1} + \mathcal{O}(p^r) \ ,$$

denn $\Gamma \cong X$ ist eindimensional. Die rechte Seite schätzen wir ab mittels der Standardeinbettung $\mathbb{A}^{N+2n} \subseteq \mathbb{P}^{N+2n}$ und den Graden der Hyperflächen via [Ha77, Kap I.7.7] zu

$$\#\mathrm{RHS} \leq \sum_{m=-r}^{r} \deg(\Gamma \cap H_m) = \deg(\Gamma) \cdot \sum_{m=-r}^{r} \deg(H_m) \leq \deg(\Gamma) \cdot \frac{2p}{p-1} \cdot p^r \ ,$$

ein Widerspruch für $r \to \infty$.

Der Fall $Y = \mathbb{A}^1$. Betrachte

$$R := \mathbb{F}_p[f, g] \subseteq \mathcal{O}_X(X) \ .$$

Die Abbildungen f, g faktorisieren kanonisch über $\operatorname{Spec} R$, welches kanonisch in $\mathbb{A}^2$ liegt. Via dieser Einbettung entsprechen sie den Koordinatenprojektionen. $X \to \operatorname{Spec} R$ ist dicht und konstruktibel. Somit enthält das Bild eine offene affine Teilmenge U von $\operatorname{Spec} R$, auf der die Koordinatenprojektionen topologisch gleich abbilden. Es reicht, U mit diesen Abbildungen zu betrachten. Den Fall $\dim U = 0$ haben wir ausgeschlossen, den eindimensionalen Fall vorher bewiesen, so daß nur $\dim U = 2$ zu behandeln bleibt. Man zählt

$$\#U(\mathbb{F}_{p^r}) = c \cdot p^{2r} + \mathcal{O}(p^{\frac{3}{2}r}) \ ,$$

während

$$\#\{(x, y) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_{p^r}) \mid x, y \quad G_{\mathbb{F}_p}\text{-konjugiert}\} \leq r \cdot p^r \ .$$

Der allgemeine Fall. Es reicht der Fall $Y = \mathbb{A}^2$ und $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ mit nicht konstanten $f_i, g_i \in \mathcal{O}_X(X)$. Betrachte

$$R := \mathbb{F}_p[f_1, f_2, g_1, g_2] \subseteq \mathcal{O}_X(X) \ .$$

Analog zu oben schränkt man sich auf einen offenen affinen Teil U von $\operatorname{Spec} R$ im $\mathbb{A}^4$ ein. Verwenden wir koordinatenweise, was wir schon wissen, und komponieren f oder g mit einer geeigneten Frobeniuspotenz, so ergeben sich Relationen

$$f_1 = g_1, \quad f_2 = g_2^{p^{m_2}} \ , \qquad m_2 \geq 0 \ .$$

Die Dimension von U ist daher höchstens 2, wobei die Fälle 0 und 1 ausgeschlossen bzw. schon in dieser Allgemeinheit behandelt sind. Im Fall $\dim U = 2$ vergleichen wir

$$\#U(\mathbb{F}_{p^r}) = c \cdot p^{2r} + \mathcal{O}(p^{\frac{3}{2}r}) \ ,$$

mit dem Folgenden, $\operatorname{Spec}(R)(\mathbb{F}_{p^r}) \subseteq \mathbb{A}^4(\mathbb{F}_{p^r})$ berücksichtigend.

$$\begin{aligned} & \#\{(x_1,x_2,y_1,y_2) \in \operatorname{Spec} R(\mathbb{F}_{p^r}) \mid (x_1,x_2),(y_1,y_2) \quad G_{\mathbb{F}_p}\text{-konjugiert}\} \\ = \quad & \#\{(y_1,y_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_{p^r}) \mid (y_1,y_2^{p^{m_2}}),(y_1,y_2) \quad G_{\mathbb{F}_p}\text{-konjugiert}\} \\ = \quad & \#\{(y_1,y_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{F}_{p^r}) \mid m_2 \in \big(\deg(y_1),\deg(y_2)\big)\} \end{aligned}$$

Nun lassen wir r beliebig große Primzahlen durchlaufen. Dadurch läßt sich die zweite Anzahl gegen $2p \cdot p^r$ nach oben abschätzen, denn eine Koordinate muß nun in $\mathbb{F}_p$ liegen. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

3.4 Überlegungen zu Überlagerungen

Dieser Abschnitt stellt die Existenz gewisser Überlagerungen sicher und betrachtet die Eigenschaft einer Kurve, konstant zu sein.

Um Aussagen über hyperbolische Kurven in Argumentationen stets auch für ihre Überlagerungen benutzen zu können, überlegt man sich:

Lemma 3.4.1. *Zahme Überlagerungen hyperbolischer Kurven sind hyperbolisch.*

Beweis: Die Erweiterungen der Restklassenkörper an den Punkten des unendlich fernen Divisors müssen separabel sein. Deshalb ist dieser auch für die überlagernde Kurve relativ étale und die normale Vervollständigung auch dort glatt. Die Riemann-Hurwitzformel

$$\chi_{C'} = \frac{\deg(C' \to C)}{[k' : k]} \cdot \chi_C$$

zur Überlagerung C' der Kurven C mit Konstantenkörpern k' und k weist für beide Eulercharakteristiken das gleiche Vorzeichen nach. □

Proposition 3.4.2. *Sei $C = (X, D)$ eine hyperbolische k-Kurve. Dann sind galoissche Überlagerungen, welche überall auf D verzweigt sind, cofinal in* Rev_C^{tame}.

Beweis: Sei l prim zur Charakteristik. Wir zeigen o.E., daß $C_{\overline{k}}$ eine galoissche l-Überlagerung besitzt, welche auf ganz $D_{\overline{k}}$ verzweigt ist. Dies ist eine topologische Frage, denn prim zur Charakteristik verhält sich alles wie über $\mathbb{C}$. Setze

$$\Pi_{g,r} := \left\langle a_i, b_i, c_j | \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} c_j = 1 \right\rangle \ .$$

Zu zeigen ist, daß keiner der kanonischen Quotienten, induziert von $c_r \mapsto 1$,

$$\Pi_{g,r}^l \twoheadrightarrow \Pi_{g,r-1}^l$$

ein Isomorphismus ist. Für $r > 1$ ist dies klar über den $\mathbb{Z}_l$-Rang der Abelisierung. Für $g = 0$ bleibt also nichts zu tun und für $g > 0$ konstruieren wir einen l-Quotienten von $\Pi_{g,1}$, welcher nicht über $\Pi_{g,0}$ faktorisiert.

Es gibt nichtabelsche l-Gruppen, z.B. $\mathbb{Z}/l^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. Finde darin zwei nichtkommutierende Elemente a, b, definiere $a_1 \mapsto a$, $b_1 \mapsto b$, $c_1 \mapsto [a, b]^{-1}$ und setze die anderen a_i, b_i auf 1. □

Definition. *Sei $C = (X, D)$ eine glatte k-Kurve. Man sagt, sie habe ein Modell über $k_0 \subseteq k$, falls $C = C_0 \times_{k_0} k$. Es heißt C konstant, falls $C_{\overline{k}}$ ein Modell über $\overline{\mathbb{F}}_p$ hat. Insbesondere gilt dann* $\mathrm{char}(k) = p > 0$.

Ist C konstant mit Modell C_0, so ist automatisch die normale Komplettierung X_0 von C_0 glatt über $\overline{\mathbb{F}}_p$, somit $X_{\overline{k}} = X_0 \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{k}$ und $D_{\overline{k}} = D_0 \times_{\overline{\mathbb{F}}_p} \overline{k}$.

Proposition 3.4.3. *Ist $C' \to C$ eine reguläre, galoissche Überlagerung hyperbolischer k-Kurven, dann hat C ein Modell über $\mathbb{F}_q$, falls C' eines besitzt.*

Beweis: Sei $G = \mathrm{Aut}(C'/C) \subseteq \underline{\mathrm{Aut}}(C')(k)$. Angenommen C' steigt ab zu $C'_0/\mathbb{F}_q$, so tut dies auch die G-Operation, denn das Automorphismenschema einer hyperbolischen Kurve ist endlich und unverzweigt [DM69, Thm 1.11]. Wir bilden Quotienten.

$$\begin{array}{ccc} C' & \longrightarrow & C'_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C'/G & \longrightarrow & C'_0/G \end{array}$$

Als Quotient eines normalen Schemas ist C'_0/G wieder normal also auch glatt. Es kommutiert das Quotientenbilden mit flachem Basiswechsel $\times_{\mathbb{F}_q} k$ [SGA 1, V Prop 1.9.]. Deshalb hat auch $C = C'/G \cong (C'_0/G) \times_{\mathbb{F}_q} k$ ein Modell über $\mathbb{F}_q$. □

Proposition 3.4.4. *Ist $C' \to C$ eine zahme Überlagerung hyperbolischer k-Kurven, dann gilt:*

$$C' \textit{ konstant} \iff C \textit{ konstant} .$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei C'/C galoissch. Von C' nach C schließt man als Korollar zur voranstehenden Proposition.

Sei o.E. $k = \overline{k}$. Nehmen wir nun an, daß C zu $C_0/\overline{\mathbb{F}}_p$ absteigt. Die Theorie über die zahme Fundamentalgruppe aus [SGA 1, XIII] besagt, daß die Projektion $C \to C_0$ einen Isomorphismus $\pi_1^{tame}(C) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{tame}(C_0)$ induziert. Deshalb steigt C'/C zu einer zahmen Überlagerung von C_0 ab, somit ist C' konstant. □

Proposition 3.4.5. *Sei $C = (X, D)$ eine hyperbolische, nicht konstante k-Kurve. Dann existiert eine zahme galoissche Überlagerung $C' = (X', D')$ mit Geschlecht g' mindestens 2 und nicht-konstantem X'.*

Beweis: Sei o.E. $k = \overline{k}$. Wir wählen $C' \to C$ beliebig galoissch mit $g' \geq 2$ gemäß [Tam97, Prop 1.11.], so daß die Überlagerung überall auf D verzweigt ist. Falls X' konstant ist, so auch X und vielmehr die verzweigte Überlagerung $X' \to X$. Ebenso steigt der Vezweigungsdivisor D ab, denn er ist Träger der Garbe der relativen Differentiale, welche absteigt. Damit ist aber C konstant im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Lemma 3.4.6. *Sei $n \geq 3$ prim zu p und $C = (X, D)$ eine k-Kurve vom Geschlecht mindestens 2. Dann gibt es ein l/k galoissch, so daß X_l eine n-Levelstruktur tragen kann.*

Beweis: Die n-Torsion der Jacobischen zu X ist ein endliches étales Gruppenschema und wird daher nach einer galoisschen Konstantenkörpererweiterung rational. □

Proposition 3.4.7. *Sei $C = (X, D)$ eine hyperbolische konstante k-Kurve. Es existiert dann sogar ein galoissches l/k, so daß bereits C_l ein Modell über einem endlichen Körper hat.*

Beweis: Proposition 3.4.3 erlaubt zu einer galoischen Überlagerung von C überzugehen. Daher fordere man o.E. $g \geq 2$, es trage X eine n-Levelstruktur zu $n \geq 3$ prim zu p und D sei eine Summe rationaler Punkte. Der darstellende Morphismus nach $\mathcal{M}_g[n]$ faktorisiert über ein $\mathbb{F}_q$, denn $X_{\overline{k}}$ steigt samt Levelstruktur zu einem Modell über einem endlichen Körper ab. Dieses ist eindeutig. Der Divisor $D_{\overline{k}}$ steigt ab zu $D_0 \subseteq X_0$, o.E. einer Summe rationaler Punkte. Es gilt:

$$D_0(\mathbb{F}_q) = D_{\overline{k}}(\overline{k}) = D(k) \ .$$

Deshalb steigt auch der Divisor D ab, somit das Komplement. □

Kapitel 4

Resultate

Nachdem nun alles Wesentliche zusammengetragen ist, beweisen wir in diesem Kapitel das Hauptergebnis:

Theorem 8. *Sei k endlich erzeugt über seinem Primkörper. Seien $C = (X, D)$ und $C' = (X', D')$ affine hyperbolische k-Kurven. Betrachte*

$$\pi_1^{tame} : \mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) .$$

Sind nicht beide Kurven C, C' konstant, so ist π_1^{tame} bijektiv. Im Fall konstanter Kurven liegt eine Injektion mit dichtem Bild vor.

Korollar. *Seien C, C' wie oben, so sind äquivalent:*

(i) $\pi_1^{tame}(C) \cong \pi_1^{tame}(C')$ *als Gruppen über* G_k

(ii) $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N},$ *so daß* $C_1(m_1) \cong C_2(m_2)$ *über* k.

Diese Form des Theorems bedarf ein paar erläuternder Kommentare. Wir fassen in Charakteristik 0 die Lokalisierung FC_k als Curv_k auf, denn es gibt keinen Frobenius zu invertieren. Im Fall konstanter Kurven ist die Topologie zu erklären. Dies geschah in Abschnitt 3.1.1.

In Charakteristik 0 handelt es sich beim Theorem um das Hauptresultat von Tamagawa aus [Tam97]. Seine Arbeit beweist auch den Fall von Kurven über endlichen Körpern, wie die Diskussion in Abschnitt 3.1.1 zeigte.

Bemerkung. *Besäße man eine Charakterisierung auch von projektiven hyperbolischen Kurven über endlichen Körpern durch ihre zahme Fundamentalgruppe, so entfiele die Einschränkung „affin" in obigem Theorem.*

Die angewendete Methode basiert weitgehend auf den Erkenntnissen Tamagawas, nämlich Spezialisierung und dem Fall über endlichen Körpern. Sie liefert aber eine einheitliche Behandlung der Fälle positiver und verschwindender Charakteristik und stellt damit einen alternativen Beweis für das Hauptresultat von [Tam97] dar.

4.1 Beweisanfang

Sei ab jetzt k stets endlich erzeugt über seinem Primkörper und $n \geq 3$ invertierbar auf den vorkommenden Schemata. Die Ergebnisse Tamagawas erlauben folgendes Lemma.

Lemma 4.1.1. *Sei T irreduzibel regulär von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ mit generischem Punkt* Spec(k). *Sei $\mathcal{C} = (\mathcal{X}, \mathcal{D})$ eine affine hyperbolische T-Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ mit n-Levelstruktur und generischer Faser C/k.*

Dann bestimmt der Isomorphietyp von $\pi_1^{tame}(C)$ in $\mathcal{G}_k$ zusammen mit der induzierten n-Levelstruktur die topologische Komponente des zu $\mathcal{X} \to T$ gehörenden Morphismus $T \to \mathcal{M}_g[n]$.

Beweis: Der Morphismus $T \to \mathcal{M}_g[n]$ von Schemata von endlichem Typ ist topologisch bestimmt durch die Bilder der abgeschlossenen Punkte T_0. Für ein reguläres T ist T_0 enthalten in der Vereinigung von regulären, irreduziblen, lokal abgeschlossenen Unterschemata von Kodimension 1. Denn es ist für ein $t \in T_0$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{T,t}$ regulär, und erzeugen $(f_1, \ldots, f_d)$ als reguläre Folge das maximale Ideal, so ist $V(f_1)$ von Kodimension 1 und wieder regulär in t. Da für exzellente Schemata die Eigenschaft regulär eine offene Bedingung darstellt [EGA 4, 7.8.3], dehnt $V(f_1)$ zu einem lokal abgeschlossenen regulären Unterschema von Kodimension 1 in T aus.

Wir bemühen nun Induktion nach der Dimension von T. Sei $T' \subseteq T$ ein lokal abgeschlossenes, irreduzibles, reguläres Unterschema von Kodimension 1 mit generischem Punkt ξ und Funktionenkörper $\kappa(\xi)$. Dann ist $\mathcal{O}_{T,\xi}$ ein diskreter Bewertungsring von k. Sei $R := \mathcal{O}_{T,\xi}^h$ die Henselisierung und k_ξ^h ihr Quotientenkörper. Durch Pullback mit $G_{k_\xi^h} \hookrightarrow G_k$ bestimmt $\pi_1^{tame}(C)$ die Extension $\pi_1^{tame}(C_{k_\xi^h})$. Diese bestimmt nach Proposition 3.1.4 angewandt auf

$$\mathcal{C} \times_T R = \big(\mathcal{X} \times_T R, \mathcal{D} \times_T R\big)/R$$

die Isomorphieklasse von $\pi_1^{tame}(\mathcal{C} \times_T \kappa(\xi))$ in $\mathcal{G}_{\kappa(\xi)}$. Die Spezialisierung der n-Levelstruktur besorgt Lemma 3.2.2, denn sp und damit $\overline{sp}$ sind gruppentheoretisch codiert.

Zum Induktionsanfang ist $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Angenommen eine gegebene zahme Fundamentalgruppe mit n-Levelstruktur entspräche zwei verschiedenen Abbildungen $\mathbb{F}_q \to \mathcal{M}_g[n]$. Diese entsprächen Kurven C, C' über $\mathbb{F}_q$ mit Levelstruktur und einem Isomorphismus $\alpha : \pi_1^{tame}(C) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{tame}(C')$ in $\mathcal{G}_k$, welcher die Levelstrukturen respektiert. Wir vergessen die Extension und betrachten π_1^{tame} in $\mathcal{G}^{ext}$, was immer noch mittels [Tam97, Prop 3.3, 3.4] und der Tatsache, daß die Galoiswirkung auf der Levelstruktur trivial ist, den Transport der Levelstrukturen durch α verrät. Das Theorem 2 zeigt, daß α geometrischen Ursprungs ist, d.h. via π_1^{tame} von einem Isomorphismus $C \cong C'$ von Schemata kommt.

Der Frobenius erzeugt die Automorphismengruppe des Konstantenkörpers. Deshalb gilt für einen geeigneten Frobeniustwist schon $C \cong C'(m)$ als $\mathbb{F}_q$-Kurven. Twisten ändert die darstellende Abbildung topologisch nicht, wir nehmen daher $m = 0$ an. Der geometrische Isomorphismus macht via π_1^{tame} auf den Fundamentalgruppen nach Konstruktion dasselbe wie α und respektiert daher die Levelstrukturen. Die darstellenden Abbildungen $\mathbb{F}_q \to \mathcal{M}_g[n]$ müssen somit gleich sein. □

Korollar. *Sei $C = (X, D)/k$ eine affine hyperbolische Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ mit einer n-Levelstruktur. Dann beschreibt $\pi_1^{tame}(C) \in \mathcal{G}_k$ die topologische Komponente des X/k darstellenden Morphismus $k \to \mathcal{M}_g[n]$.*

Beweis: Wähle T regulär von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ mit generischem Punkt $\mathrm{Spec}(k)$, so daß die Daten zu einer über T relativen affinen hyperbolischen Kurve mit Levelstruktur ausdehnen wie im Lemma 4.1.1. □

Korollar. *Es codiert $\pi_1^{tame}(C)$ gruppentheoretisch in $\mathcal{G}_k$, ob C konstant ist.*

Beweis: Es reicht nach Proposition 3.4.5 zu entscheiden, ob für eine zahme Überlagerung die glatte Vervollständigung X' konstant ist. Ein cofinales System dieser X' wird durch Abbildungen in einen Modulraum $\mathcal{M}_g[n]$ zu variablem g dargestellt. Ein solches X' ist damit konstant, falls der Bildpunkt ein abgeschlossener ist. □

Der Beweis des Theorems zerfällt somit ab hier in disjunkte Teile, je nachdem, ob die behandelten Kurven konstant sind oder nicht. Wir wenden uns zunächst dem Fall nicht konstanter Kurven zu und konzentrieren uns auch dabei nochmals auf solche mit speziellen Eigenschaften.

4.2 Nicht konstante Kurven

Lemma 4.2.1. *Sei $n \geq 3$ invertierbar in k. Seien $C = (X, D)$ und $C' = (X', D')$ zwei affine hyperbolische k-Kurven mit nicht konstanten X, X' und $g, g' \geq 2$, welche eine n-Levelstruktur erlauben. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung $\tilde{\lambda}$, welche in das Diagramm paßt:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') \arrow[r, "\pi_1^{tame}"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "\tilde{\lambda}"'] \\ \mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(X, X') \arrow[r, hook] & \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n\right) \end{tikzcd} .$$

Dieses $\tilde{\lambda}$ ist funktoriell bezüglich Komposition von Isomorphismen.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right)$. Wähle eine n-Levelstruktur auf $\pi_1^{tame}(C)$ und transportiere sie mittels α nach $\pi_1^{tame}(C')$. Wähle T regulär von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ mit generischem Punkt $\mathrm{Spec}(k)$, so daß die Daten gleichzeitig für C und C' zu affinen hyperbolischen T-Kurven mit Levelstruktur ausdehnen. Gemäß dem Lemma erfüllen die Abbildungen

$$f_X, f_{X'} : T \to \mathcal{M}_g[n] \ ,$$

welche X und X' darstellen, die Voraussetzungen für den Satz 3.3.2 über topologisch gleiche Morphismen. Wir erhalten ein $m \in \mathbb{Z}$ und $f_X = f_{X'} \circ \mathrm{Frob}^m$, welches eindeutig ist, da X und X' nicht konstant sind, und o.E. $m \geq 0$. Äquivalent entspricht dem ein eindeutiger k-Isomorphismus $X \cong X'(m)$, welcher die beteiligten Levelstrukturen respektiert. Wir definieren

$$\tilde{\lambda}(\alpha) := \big(X \cong X'(m) \Leftarrow X'\big) \ \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(X, X') \ .$$

Nach Konstruktion ist offensichtlich

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \arrow[dl, dotted, "\tilde{\lambda}"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(X, X') \arrow[r, hook] & \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n\right)
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Dank der Injektivität des horizontalen Pfeils aus dem modifizierten Theorem von Serre in Satz 3.2.4 folgen die restlichen Aussagen, wenn man jeweils in die rechte untere Ecke des Diagramms abbildet. Es ist $\tilde{\lambda}$ unabhängig von der Wahl des T und der Wahl der n-Levelstruktur auf $\pi_1^{tame}(C)$. Ebenso folgt die Kommutativität des restlichen Diagramms und die Funktorialität bezüglich Komposition von Isomorphismen. □

Eine weitere mögliche Abhängigkeit von Wahlen gilt es auszuschließen.

Lemma 4.2.2. *$\tilde{\lambda}$ ist unabhängig von der Wahl des Levels n. Seien genauer n_1, n_2 mögliche Level, so ist auch $n_{12} = kgV(n_1, n_2)$ ein solcher und die zugehörigen $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_{12}$ stimmen überein.*

Beweis: Die n_{12}-Torsion einer abelschen Varietät wird von ihrer n_1 und n_2-Torsion erzeugt. Sei *o.E.* $n_1 | n_2$. Es reicht nun die triviale Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \arrow[d] \\
\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(X, X') \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n_2, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n_2\right) \arrow[d, "\mathrm{mod}\ n_1"] \\
 & \mathrm{Isom}_{\mathbb{Z}}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n_1, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n_1\right)
\end{tikzcd}$$

und die angezeigte Injektivität aus Satz 3.2.4. □

Für die folgenden Argumentationen wird der Standpunkt wichtig, die Isom-Mengen als globale Schnitte von étalen $\underline{\mathrm{Isom}}$-Garben auf $k_{ét}$ aufzufassen. Dies gilt auch für die Isom-Menge der G_k-Moduln $\overline{\pi}_1(\cdot)^{ab}/n$. Der Besitz von n-Levelstrukturen spiegelt nur die Konstanz dieser in jedem Fall lokalkonstanten Garbe (bzw. stetigen diskreten G_k-Moduln) wider. Es ist die Abbildung

$$\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbb{Z}[G_k]}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n\right)$$

ein Garbenmorphismus, denn es erhielt $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}_k}$ die Garbenstruktur aus der Beschreibung durch äußere G_k-Moduln.

Lemma 4.2.3. *Sei $n \geq 3$ prim zu p. Seien $C = (X, D)$ und $C' = (X', D')$ zwei affine hyperbolische k-Kurven mit nicht konstanten X, X' vom Geschlecht ≥ 2. Dann gibt es im Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') \arrow[r, "\pi_1^{tame}"] \arrow[d, "\subseteq"'] & \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "\tilde{\lambda}"'] \\
\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}(X, X') \arrow[r, hook] & \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbb{Z}[G_k]}\left(\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n, \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n\right)
\end{tikzcd}$$

eine eindeutige Garbenabbildung $\tilde{\lambda}$.

Beweis: Das Faktorisieren eines Garbenmorphismus über eine Untergarbe ist eine lokale Frage. Für l/k hinreichend groß existiert $\tilde{\lambda}$ auf Schnitten nach Lemma 4.2.1. □

Hat man eine Überlagerung und kann man $\tilde{\lambda}$ sowohl für den Totalraum als auch für die Basis konstruieren, so klärt das folgende Lemma die Verträglichkeit.

Lemma 4.2.4. *Seien $C = (X, D)$ und $C' = (X', D')$ zwei affine hyperbolische k-Kurven. Wir fixieren je eine Galoiskorrespondenz für C und C'. Betrachte einen offenen Normalteiler $H \lhd \pi_1^{tame}(C)$ entsprechend einer l-Kurve $C_H = (X_H, D_H)$. Fordere, daß X und X_H nicht konstant und vom Geschlecht ≥ 2 seien.*

Sei $\alpha : \pi_1^{tame}(C) \xrightarrow{\sim} \pi_1^{tame}(C')$ in $\mathcal{G}_k$. Es ist $\alpha(H) =: H'$ wohldefiniert und sei in $\mathcal{G}_l$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\subseteq"'] & H' \arrow[d, "\subseteq"] \\
\pi_1^{tame}(C_l) \arrow[r, "\alpha|_l"] & \pi_1^{tame}(C'_l)
\end{tikzcd} \quad . \qquad \textit{Dann kommutiert} \qquad \begin{tikzcd}
X_H \arrow[r, "\tilde{\lambda}(\beta)"] \arrow[d] & X'_{H'} \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\tilde{\lambda}(\alpha)"] & X'
\end{tikzcd} \quad .$$

Beweis: Die Frage hängt offensichtlich nur von $\alpha|_l$ ab. O.E. ersetze man daher C durch C_l, so daß es sich bei X_H/X um eine reguläre Überlagerung von Kurven handelt.

Wir wählen geeignete Repräsentanten für α, β, so daß $\beta = \alpha|_H$. Wir erhalten

$$\bar{\alpha} : \mathrm{Aut}(C_H/C) = \pi_1^{tame}(C)/H \xrightarrow{\alpha} \pi_1^{tame}(C')/H' = \mathrm{Aut}(C'_{H'}/C') \ .$$

Es normalisiert $\tilde{\lambda}$ die Aktionen der Decktransformationen. Genauer sei $\bar{\sigma}$ aus $\mathrm{Aut}(C_H/C)$ und σ ein Urbild in $\pi_1^{tame}(C)$. Dann ist $\pi_1(\bar{\sigma}) = \phi_\sigma$ die Konjugation mit σ. Berücksichtigt man noch $\tilde{\lambda} \circ \pi_1^{tame} = id$, also $\tilde{\lambda}(\phi_\sigma) = \bar{\sigma}$, so ergibt sich:

$$\tilde{\lambda}(\beta) \circ \bar{\sigma} = \tilde{\lambda}(\alpha|_H \circ \phi_\sigma) = \tilde{\lambda}(\phi_{\alpha(\sigma)} \circ \alpha|_H) = \bar{\alpha}(\bar{\sigma}) \circ \tilde{\lambda}(\beta) \ .$$

Wir benutzen nun, daß X_H/X ein Schema-Quotient ist. Das Normalisieren bedeutet, daß $\tilde{\lambda}(\beta)$ über einer Abbildung $\gamma : X \to X'$ aus FC_k sitzt, von der es zu zeigen gilt, daß sie mit $\tilde{\lambda}(\alpha)$ übereinstimmt. Dies erfährt man durch die Wirkung auf den G_k-Moduln $\overline{\pi}_1(\cdot)^{ab}/n$. Wir wählen dazu $n \geq 3$ prim zu p und $\deg(X_H/X)$. Damit wird

$$\overline{\pi}_1(X_H)^{ab}/n \twoheadrightarrow \overline{\pi}_1(X)^{ab}/n \ ,$$

denn der Kokern ist Quotient von $\pi_1^{tame}(C)/H$, welches nach der speziellen Wahl von n zu diesem prime Ordnung hat. Es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\overline{\pi}_1(X_H)^{ab}/n \arrow[r, "\tilde{\lambda}(\beta)=\beta"] \arrow[d, two heads] & \overline{\pi}_1(X'_{H'})^{ab}/n \arrow[d, two heads] \\
\overline{\pi}_1(X)^{ab}/n \arrow[r, "\gamma", "\tilde{\lambda}(\alpha)=\alpha"'] & \overline{\pi}_1(X')^{ab}/n \ ,
\end{tikzcd}$$

in welchem die obere Zeile die untere bestimmt. Somit stimmen γ und $\tilde{\lambda}(\alpha)$ überein. Insbesondere ist der in $\tilde{\lambda}(\beta)$ und $\tilde{\lambda}(\alpha)$ versteckte Frobeniustwist identischen Grades (Satz 3.2.4). $\square$

Korollar. *Seien $C = (X, D)$ und $C' = (X', D')$ zwei affine hyperbolische k-Kurven mit nicht konstanten X, X' vom Geschlecht ≥ 2. Dann faktorisiert $\tilde{\lambda}$ im Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') \arrow[r, "\pi_1^{tame}"'] \arrow[d, "\subseteq"'] & \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \arrow[l, dotted, bend right, "\lambda"'] \arrow[dl, "\tilde{\lambda}"] \\
\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}(X, X') &
\end{tikzcd}$$

über ein Linksinverses λ zu π_1^{tame}.

Beweis: Wenn $\tilde{\lambda}$ über $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}_k}(C, C')$ faktorisiert, so ist dies automatisch ein Linksinverses zu π_1^{tame}.

Die Existenz ist eine lokale Frage auf $k_{ét}$. Man betrachte das Resultat aus dem Lemma für ein C_H/C, welches vollständig entlang D verzweigt ist. Definiere für ein α wie im Lemma ein passendes β durch die Einschränkung auf H. Es ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} X_H & \xrightarrow{\sim} & X'_{H'}(m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\sim} & X'(m)\ . \end{array}$$

Damit bildet $\tilde{\lambda}(\alpha)$ die Verzweigungsorte isomorph aufeinander ab und respektiert somit die Komplemente C und C'. □

Korollar. *Seien $C = (X, D)$ und $C' = (X', D')$ zwei affine, hyperbolische und nicht konstante k-Kurven. Dann definiert das Lemma eine Abbildung*

$$\lambda : \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{G}_k}\left(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\right) \longrightarrow \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{FC}_k}(C, C')\ .$$

Beweis: Wähle eine galoissche Überlagerung $C_H = (X_H, D_H)$ vom Geschlecht ≥ 2 mit nichtkonstantem X_H. Dafür kennen wir λ bereits. Mit einem Isomorphismus α der Fundamentalgruppen verfahren wir nun wie folgt: Wir schränken ihn ein auf H und erhalten ein Paar α, β wie im Lemma. Die Technik des Lemmas zeigt, daß $\lambda(\beta)$ zu einem Isomorphismus

$$\lambda(\alpha) := \left(C \xrightarrow{\lambda(\beta)/\,\mathrm{Aut}(C_H/C)} C'(m)\right)$$

der Quotienten absteigt. Dies ist eindeutig, da β bis auf Verkettung mit

$$\mathrm{Inn}\left(\pi_1^{tame}(C)\right)/\,\mathrm{Inn}(H) = \mathrm{Aut}(C_H/C)$$

durch α bereits festgelegt ist und diese Mehrdeutigkeit beim Übergang zum Quotienten verschwindet.

Eine unmittelbare Anwendung des Lemmas zeigt, daß λ nicht von der speziell gewählten Überlagerung C_H abhängt und für Kurven mit bereits nicht konstanter Vervollständigung auch nichts Neues definiert wird. □

Lemma 4.2.5. *λ ist ein Linksinverses zu π_1^{tame}.*

Beweis: Wähle wie in der Definition von λ eine Überlagerung C_H/C mit Galoisgruppe G. Sei $f : C \to C'(m)$ ein Isomorphismus in FC_k. Bezeichne $\pi_1^{tame}(f)(H)$ mit H'. Da π_1^{tame}(k-Frob) ein Isomorphismus ist, besitzt man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_H & \xrightarrow{f_H} & C'_{H'}(m) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{f} & C'(m)\ . \end{array}$$

Die Notation $f_H/G = f$ bedeute, daß sich f_H durch f auf den Quotienten nach der Gruppe G fortsetzt. Die Rechnung

$$f = f_H/G = \lambda\big(\pi_1^{tame}(f_H)\big)/G = \lambda\big(\pi_1^{tame}(f)|_H\big)/G = \lambda\big(\pi_1^{tame}(f)\big)$$

weist λ als Linksinverses aus. $\square$

Lemma 4.2.6. *λ ist das Inverse zu π_1^{tame}.*

Beweis: Es reicht nachzuweisen, daß λ injektiv ist. Nehmen wir an, das Gegenteil sei der Fall, so können wir wegen der Funktorialität o.E. mit $C = C'$ und einem Automorphismus α von $\pi_1^{tame}(C)$ arbeiten, für den $\lambda(\alpha) = id_C$ gilt.

Wir wählen eine Galoiskorrespondenz und einen Repräsentanten $\hat{\alpha}$ für α als Isomorphismus von pro-endlichen Gruppen. Wir verwenden nurmehr dieses $\hat{\alpha}$, um die nötigen Einschränkungen auf offene Untergruppen zu bestimmen, die bei der Definition von λ gebraucht werden.

Es induziert $\hat{\alpha}$ eine Permutation der Überlagerungen und Isomorphismen der zugehörigen Fundamentalgruppen.

$$\hat{\alpha}|_H : H \xrightarrow{\sim} \hat{\alpha}(H)$$

Diese werden durch λ in ein kompatibles System von Isomorphismen

$$\begin{tikzcd} C_H \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & C_{\hat{\alpha}(H)} \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

übersetzt. Die Kompatibilität ergibt sich aus der Beobachtung, daß Überlagerungen kategoriell Epimorphismen sind; man sich damit ohne Einschränkung in einer galoisschen Situation befindet, in der man die Wohldefiniertheit der Definition von λ bemühen kann. Es bilden nämlich die galoisschen Überlagerungen mit Geschlecht ≥ 2 und nicht konstanter Vervollständigung ein cofinales Teilsystem in Rev_C^{tame}.

Die Gesamtheit dieser Isomorphismen vereinigt zu einer Decktransformation von $\hat{C}/C$, der universellen Überlagerung, welche für die Galoiskorrespondenz gebraucht wurde. Diese Decktransformation ist mit der $\overline{k}/k$-Struktur von $\hat{C}/C$ verträglich, denn alle konstruierten Überlagerungen waren mit einer kanonischen Erweiterung des Konstantenkörpers in $\overline{k}$ definiert und die $\tilde{\lambda}$'s respektierten diese. Wir erhalten also ein Element aus $\overline{\pi}_1^{tame}(C)$, mit dem wir unseren Repräsentanten $\hat{\alpha}$ abändern. Der entstehende Repräsentant fixiert damit alle offenen Untergruppen von $\pi_1^{tame}(C)$.

Das abschließende Argument entstammt der Arbeit von Tamagawa. Fixiert $\hat{\alpha}$ alle offenen Untergruppen, so hält er auch alle abgeschlossenen fest, denn diese sind die Schnitte aller sie umgebenden offenen Untergruppen. Damit werden alle

Quasischnitte der Extension $\pi_1^{tame}(C)$, das heißt solche, die nur auf einer offenen Untergruppe $G_l \hookrightarrow G_k$ definiert sind, elementweise festgehalten. Die Bilder dieser Quasischnitte erzeugen aber $\pi_1^{tame}(C)$, denn k ist hilbertsch, ergo entspricht $\hat{\alpha}$ der Identität. $\square$

4.3 Konstante Kurven

Es stellt sich heraus, daß man für konstante Kurven besser mit äußeren Galoisdarstellungen arbeitet. Wir verwenden die Äquivalenz aus Satz 1.3.2, welche der Funktor R auf den Isomorphiegruppoiden induziert.

Behandeln wir zunächst affine hyperbolische Kurven C/k, die schon Modelle über einem endlichen Körper haben, etwa $C = C_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$. Wir fordern weiter, daß $k/\mathbb{F}_q$ relativ algebraisch abgeschlossen ist. Die Projektion $C \to C_0$ induziert eine Abbildung von Extensionen

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \overline{\pi}_1^{tame}(C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \pi_1^{tame}(C) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & G_k \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & \overline{\pi}_1^{tame}(C_0) \arrow[r] & \pi_1^{tame}(C_0) \arrow[r] & G_{\mathbb{F}_q} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} ,$$

in welchem der Isomorphismus der Kerne wohlbekannt und eindeutig in $\mathcal{G}^{ext}$ definiert ist, denn man wählt ja einen algebraischen Abschluß $\overline{k}/k$ fest. Für die äußeren Galoisdarstellungen folgt unmittelbar

$$\rho_C = (G_k \twoheadrightarrow G_{\mathbb{F}_q})^* \rho_{C_0} = \left(G_k \twoheadrightarrow G_{\mathbb{F}_q} \xrightarrow{\rho_{C_0}} \mathrm{Out}(\overline{\pi}_1^{tame}) \right) .$$

Mit einer weiteren solchen Kurve $C' = C_0' \times_{\mathbb{F}_q} k$ erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_{\mathbb{F}_q}}(C_0, C_0') \arrow[r, "\pi_1^{tame}"] \arrow[d, "\times_{\mathbb{F}_q} k"'] & \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}^{ext}(G_{\mathbb{F}_q})} \left(\overline{\pi}_1^{tame}(C_0), \overline{\pi}_1^{tame}(C_0') \right) \arrow[d] \\
\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_k}(C, C') \arrow[r, "\pi_1^{tame}"] & \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}^{ext}(G_k)} \left(\overline{\pi}_1^{tame}(C), \overline{\pi}_1^{tame}(C') \right)
\end{tikzcd} .$$

Der rechte vertikale Pfeil benutzt die Isomorphismen der jeweiligen geometrischen Fundamentalgruppen und ist bijektiv, da die Abbildung der Galoisgruppen surjektiv ist. Ebenso bijektiv ist der linke vertikale Pfeil, da die Isom-Mengen disjunkte Vereinigungen von $\mathbb{F}_q$ (bzw. k) rationalen Punkten von endlichen unverzweigten Isom-Schemata sind, welche durch eben diesen Basiswechsel $\times_{\mathbb{F}_q} k$ auseinander hervorgehen, und $k/\mathbb{F}_q$ relativ algebraisch abgeschlossen angenommen wurde.

Damit haben wir die Aussage des Theorems für C, C' auf die schon im Abschnitt 3.1.1 bewiesene für C_0 und C'_0 zurückgeführt.

Seien nun C, C' beliebige konstante affine hyperbolische k-Kurven. Gemäß Proposition 3.4.7 haben sie nach einer galoisschen Erweiterung l/k ein Modell C_0, C'_0 über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$. Wir kennen also die Aussage des Theorems étale lokal, wenn man die Isom-Garben auf $k_{ét}$ betrachtet, und müssen sie globalisieren. Mit der Eigenschaft injektiv geschieht dies unmittelbar.

Wir analysieren die Galoiswirkung von $G(l/k)$ auf der oberen Zeile des folgenden Diagramms aus Abschnitt 3.1.1, welche wir schon mit der entsprechenden für die Modelle über $\mathbb{F}_q$ identifiziert haben.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Isom}_{\mathrm{FC}_l}(C_l, C'_l) \arrow[r, "\pi_1^{tame}"] \arrow[d, two heads, "S"'] & \mathrm{Isom}_{\mathcal{G}^{ext}(G_l)}\big(\overline{\pi}_1^{tame}(C), \overline{\pi}_1^{tame}(C')\big) \arrow[d, two heads, "V"] \\
\mathrm{Isom}_{\mathrm{Sch}}(C_0, C'_0) \arrow[r, "\sim", "\pi_1^{tame}"'] & \mathrm{Isom}^{out}\big(\pi_1^{tame}(C_0), \pi_1^{tame}(C'_0)\big)
\end{tikzcd}$$

Sei speziell f ein $G(l/k)$-invarianter Isomorphismus der G_l-Darstellungen $\overline{\pi}_1^{tame}$. Bezüglich V sitzt er in einer als Menge $G(l/k)$-invarianten Faser:

$$V^{-1}\big(V(f)\big) = G_l.f = G_{\mathbb{F}_q}.f \quad .$$

Denn sei $\tau \in G_l$ und damit $\rho_{C'}(\tau) \circ f$ ein beliebiges Element dieser Faser, so operiert ein $\bar{\sigma} \in G(l/k)$ vermöge eines Urbilds $\sigma \in G_k$ als:

$$\bar{\sigma}.\big(\rho_{C'}(\tau) \circ f\big) = \rho_{C'}(\sigma) \circ \rho_{C'}(\tau) \circ f \circ \rho_C(\sigma^{-1}) = \rho_{C'}(\sigma\tau\sigma^{-1}) \circ f \in G_l.f \quad .$$

Diese Faser enthält dicht geometrische Morphismen. Sei $f^{geom} : C_l \to C'_l$ in FC_l ein solcher, demnach

$$\mathcal{F} := \langle \mathrm{Frob}_q \rangle^{\mathbb{Z}}.f^{geom} \subseteq G_{\mathbb{F}_q}.f \quad .$$

Dann fixiert $G(l/k)$ diese Teilmenge $\mathcal{F}$, denn π_1^{tame} ist $G(l/k)$-äquivariant. Ferner erhält die Operation die Zerlegung der Isom-Menge nach dem Δ-Grad, denn sie ist geometrisch durch die Konjugation mit Isomorphismen von Schemata realisiert. Es enthält $\mathcal{F}$ aber in jedem Δ-Grad nur einen Isomorphismus. Diese müssen daher alle elementweise $G(l/k)$-invariant sein. Damit globalisiert sich die Dichtheit der Abbildung π_1^{tame} von l nach k.

4.4 Kommentare

Aus dem Ergebnis dieser Arbeit lassen sich die folgenden zusätzlichen Ergebnisse ableiten. Benutzt man die Rekonstruktion der zahmen Fundamentalgruppe aus Proposition 1.5.2, so ergibt sich unmittelbar:

Korollar. *Sei k ein endlich erzeugter Körper von positiver Charakteristik. Es haben affine hyperbolische Kurven genau dann in $\mathcal{G}_k$ isomorphe étale Fundamentalgruppe, falls die eine durch Frobeniustwists aus der anderen hervorgeht.*

Beweis: Verbinde Proposition 1.5.2 mit dem Theorem 8. □

Nun verwenden wir ein Theorem von F. Pop. Es bezeichne k^i den rein inseparablen Abschluß von k.

Theorem 9. *Seien k, l endlich erzeugte Körper. Dann ist*

$$\pi_1 : \mathrm{Isom}_{\mathrm{TSch}}\big(\mathrm{Spec}(l), \mathrm{Spec}(k)\big) = \mathrm{Isom}(k^i, l^i) \twoheadrightarrow \mathrm{Isom}^{out}(G_l, G_k)$$

surjektiv, und Isomorphismen werden gleich auf der Fundamentalgruppe, genau falls sie sich um die Komposition mit einer Frobeniuspotenz unterscheiden.

Dies kombiniert mit dem Ergebnis dieser Arbeit zu einer „absoluten“ Version der anabelschen Grothendieck-Vermutung.

Theorem 10. *Seien C/k und C'/k' affine hyperbolische Kurven über endlich erzeugten Körpern. Dann ist*

$$\pi_1^{tame} : \mathrm{Isom}_{\mathrm{TSch}}(C, C')_{/\langle \mathrm{Frob} \equiv id \rangle} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}^{out}\big(\pi_1^{tame}(C), \pi_1^{tame}(C')\big)$$

bijektiv. □

Die Modifikation der geometrischen Isom-Menge besteht wieder im Identifizieren von Morphismen, welche sich um einen Frobenius unterscheiden.

Literaturverzeichnis

[DM69] P. Deligne, D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. IHES 36 (1969), 75-109.

[EGA 4] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Étude locale des Schémas et des Morphismes de Schémas, Publ. IHES 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).

[Fa98] G. Faltings, Curves and their fundamental groups [following Grothendieck, Tamagawa and Mochizuki], Séminaire Bourbaki, année 1997/98, exposé 840.

[Gr83] A. Grothendieck, Brief an Faltings (27/06/1983), in: L. Schneps & P. Lochak (eds). Geometric Galois Action 1, Cambridge University Press 1997, 49-58.

[Gr84] A. Grothendieck, Esquisse d'un programme, in: L. Schneps & P. Lochak (eds). Geometric Galois Action 1, Cambridge University Press 1997, 7-48.

[GM71] A. Grothendieck, J.P. Murre, The Tame Fundamental Group of a Formal Neighbourhood of a Divisor with Normal Crossing on a Scheme, Lecture Notes in Mathematics 208, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[Ha77] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer Verlag, 1977.

[KS90] M. Kaschiwara, P. Schapira, Sheaves on Manifolds, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer, 1990.

[Kn83] F.F. Knudsen, The projectivity of the moduli space of stable curves II: The stack $\mathcal{M}_{g,n}$, Math. Scand. 52 (1983), 161-199.

[LW54] S. Lang, A. Weil, Number of points of varieties in finite fields, Amer. J. Math. 76 (1954), 819-827.

[Mz96] S. Mochizuki, The profinite Grothendieck conjecture for closed hyperbolic curves over numberfields, J. Math. Sci. Tokyo, 3 (1996), 571-627.

[Mz96'] S. Mochizuki, The local pro-p anabelian geometry of curves, preprint 1097, RIMS, Kyoto University, Kyoto 1996.

[Pop90] F. Pop, On Galois theory of function fields of one variable over number fields, J. reine angew. Math. 406 (1990), 200-218.

[Pop94] F. Pop, On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry, Ann. of Math. 138 (1994), 145-182.

[Pop95] F. Pop, On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry 2, Preprint Series Arithmetik 2, No 16, Heidelberg 1995.

[Ser59] J.-P. Serre, Groupes Algébriques et Corps de Classes, Hermann, Paris, 1959.

[Ser61] J.-P. Serre, Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geq 3$, appendice à l'exposé 17 du séminaire Cartan 60/61.

[SGA 1] A. Grothendieck, Mme M. Raynaud, Séminaires de Géometrie Algébrique du Bois Marie 1960/61, Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1), Lecture Notes in Mathmatics 224, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.

[SGA 4] A. Grothendieck, M. Artin, J.L. Verdier, Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Heidelberg, 1972-1973.

[SGA $4\frac{1}{2}$] P. Deligne, Cohomologie Étale, Lecture Notes in Math. 569, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.

[Tam97] A. Tamagawa, The Grothendieck conjecture for affine curves, Compositio Math. 109 (1997), 135-194.