Projektive anabelsche Kurven in positiver Charakteristik

Zur Hausdorffpreisaufgabe 2002/2003

Jakob Stix, Mathematisches Institut der Universität Bonn

6. Oktober 2004

Abstrakt — Zwei projektive, glatte, nicht konstante Kurven vom Geschlecht $g \geq 2$ über einem endlich erzeugten, unendlichen Körper haben nur dann isomorphe äußere Galoisdarstellungen auf ihrer étalen Fundamentalgruppe, wenn eine der beiden die andere rein inseparabel überlagert. Im einzig offenen Fall, dem Fall eines Grundkörpers positiver Charakteristik, handelt es sich um das Hauptergebnis der Dissertation des Autors.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Anabelsche Varietäten

Die Fundamentalgruppe einer zusammenhängenden algebraischen Varietät X/K klassifiziert endliche étale Überlagerungen von X. Sie ist eine pro-endliche Gruppe $\pi_1(X, \overline{x})$, welche von der Wahl eines Basispunktes $\overline{x} \in X$ nur bis auf einen inneren Automorphismus abhängt. Wir bezeichnen mit $\overline{K}$ einen fixierten algebraischen Abschluß des Körpers K, es sei $\mathrm{Gal}_K = \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ seine absolute Galoisgruppe, und von X nehmen wir an, daß $X_{\overline{K}} = X \times_K \overline{K}$ immer noch zusammenhängend ist. Dann gibt uns IX 6.1 [SGA1] eine natürliche kurze exakte Sequenz

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{K}}, \overline{x}) \to \pi_1(X, \overline{x}) \to \mathrm{Gal}_K \to 1 \ , \tag{1.1}$$

aus der wir im wesentlichen durch Konjugation die folgende äußere Galoisdarstellung

$$\rho_X : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{Out}\big(\pi_1(X_{\overline{K}})\big)$$

konstruieren. Dabei bezeichnet Out die Gruppe der Automorphismen modulo inneren Automorphismen. Für die Darstellung ρ_X wird die Wahl des Basispunktes irrelevant.

Anabelsche Geometrie behandelt das Problem, geometrische Informationen über X/K aus gruppentheoretischen Eigenschaften von $\pi_1(X, \overline{x})$ oder der zugehörigen Darstellung ρ_X zu dechiffrieren. Genauer gesagt bezeichnet man eine K-Varietät als anabelsch, wenn sie zu einer Kategorie Anab_K von Varietäten über K gehört, so daß die Einschränkung des Fundamentalgruppenfunktors π_1 auf Anab_K eine Einbettung in eine Kategorie von ausschließlich gruppentheoretischer Natur liefert. Die Bezeichnung *anabelsch* spiegelt die landläufige Meinung wider, daß anabelsche Varietäten eine höchst nichtabelsche Fundamentalgruppe besitzen.

Der Begriff anabelscher Varietäten datiert zurück auf einen Brief Grothendiecks an Faltings aus dem Jahr 1983, siehe [Gr83]. Grothendieck beschreibt dort eine Reihe von Vermutungen aus dem Gebiet, welches wir heute *Anabelsche Geometrie* nennen. Sein "Yoga der anabelschen Geometrie" bezeichnet geeignete Varietäten — insbesondere hyperbolische Kurven — über absolut endlich erzeugten Körpern als anabelsch.

Man unterscheidet drei Arten von Grothendieck Vermutungen der anabelschen Geometrie: die Hom-Form, die Isom-Form und die Vermutung über Spaltungen. Die Hom-Form behandelt Kategorien von Varietäten zusammen mit dominanten Abbildungen. Die Isom-Form hingegen befaßt sich ausschließlich mit Isomorphismen. Daher entspricht die Isom-Form im wesentlichen der Rekonstruktion des Isomorphietyps der anabelschen Varietät zusammen mit einer Diskussion des Fundamentalgruppenfunktors auf den Automorphismen. Die Vermutung über Spaltungen ist ein wenig anders gelagert, da hier die K-rationalen Punkte einer geometrisch zusammenhängenden Varietät mit Konjugationsklassen von Spaltungen der Sequenz (1.1) in Bijektion gebracht werden sollen. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf den Fall anabelscher Geometrie in der Isom-Form, und zwar in positiver Charakteristik.

1.2 Das Resultat

In positiver Charakteristik kann die naive Isom-Form der Grothendieck Vermutung nicht gelten. Aufgrund der topologischen Invarianz der Fundamentalgruppe, vgl. [SGA4] VIII, induziert der geometrische Frobenius Isomorphismen zwischen Varietäten, welche als solche aber nicht isomorph sind — etwa zwischen elliptische Kurven mit $\jmath$-Invariante nicht aus $\mathbb{F}_p$ und derjenigen elliptischen Kurve zu $\jmath^p$. Als natürlicher Ausweg bietet sich an, das Problem "wegzudefinieren": wir invertieren formal den geometrischen Frobenius F_K zwischen K-Varietäten, vgl. [Sx02a] §3. Genauer benutzen wir das Kalkül der Brüche mit linksseitigen Nennern, um für Varietäten X und Y über dem Körper K positiver Charakteristik Frobenius-lokalisierte Hom-Mengen wie folgt zu definieren.

$$\mathrm{Hom}_{K,F_K^{-1}}(X,Y) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_K\big(X, Y(n)\big)$$

Die Transferabbildungen des Limes setzen sich aus den K-Frobenii zusammen, und $Y(n)$ bezeichnet den n-fach iterierten Basiswechsel mittels Frobenius auf K. Eine kurze Diskussion dieses Lokalisierungsprozesses findet man in [Sx02b] Appendix B.

Definition 1.1. *Sei S ein Schema. Unter einer* **glatten, eigentlichen Kurve** *X/S verstehen wir eine glatte, eigentliche Abbildung $f : X \to S$ von endlicher Präsentation mit geometrisch zusammenhängenden Fasern der Dimension 1. Eine* **glatte Kurve** *X/S ist eine glatte Abbildung $f : X \to S$, so daß lokal auf S eine glatte Kompaktifizierung $\overline{f} : \overline{X} \to S$ durch eine glatte, eigentliche Kurve existiert, deren Rand $\overline{X} \setminus X$ endlich und relativ étale über S liegt.*

Das **Geschlecht** *g einer Faser und der* **Grad** *n des Randdivisors sind lokalkonstante Funktionen auf S. Die S-Kurve nennt man* **hyperbolisch**, *falls die Euler-Charakteristik $\chi = 2 - 2g - n$ negativ ist.*

Man nennt die Kurve X/S **isotrivial**, *falls es ein endlich surjektives $S' \to S$ gibt, so daß der Basiswechsel $X_{S'} = X \times_S S'$ isomorph zu der Basiserweiterung einer Kurve über einem endlichen Körper ist.*

Als Hauptresultat der Arbeit ergibt sich das folgende Theorem:

Theorem 1.2. *Es sei K ein endlich erzeugter Körper der Charakteristik $p \geq 0$ mit algebraischem Abschluß $\overline{K}$. Es seien X und X' zwei glatte, hyperbolische Kurven über K, von denen mindestens eine nicht isotrivial ist. Dann induziert der Funktor π_1 eine natürliche Bijektion*

$$\pi_1 : \mathrm{Isom}_{K,F_K^{-1}}\big(X, X'\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_K}\big(\pi_1(X_{\overline{K}}), \pi_1(X'_{\overline{K}})\big) \tag{1.2}$$

endlicher Mengen.

Hier bedeutet $\mathrm{Isom}_{K,F_K^{-1}}\big(\cdot,\cdot\big)$ die Menge der Isomorphismen in der Kategorie der K-Varietäten, wobei der geometrische Frobenius F_K formal invertiert worden ist. Hat K die Charakteristik 0, so ignoriere man die Frobeniuslokalisation. Die Notation $\mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_K}\big(\cdot,\cdot\big)$ bezeichnet die Menge der Isomorphismen von äußeren Galoisdarstellungen, d.h. Isomorphismen der Gruppen bis auf Komposition mit inneren Automorphismen, die mit der Galoiswirkung wieder bis auf innere Automorphismen vertauschen. Wir formulieren das folgende unmittelbare Korollar, um die Macht der Galoisoperation auf der étalen Fundamentalgruppe zu betonen.

Korollar 1.3. *Es sei K ein endlich erzeugter Körper der Charakteristik $p \geq 0$ und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluß. Es seien X und X' glatte, hyperbolische Kurven über K, von denen wenigstens eine nicht isotrivial ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Fundamentalgruppen $\pi_1(X_{\overline{K}})$ und $\pi_1(X'_{\overline{K}})$ sind als äußere Gal_K-Darstellungen isomorph .

(b) Die Kurven X und X' sind bis auf einen Frobenius-Twist isomorph, d.h. es gibt natürliche Zahlen m, m', so daß $X(m)$ isomorph ist zu $X'(m')$ als Kurven über K.

Natürlich darf nicht unerwähnt bleiben, daß von diesem Resultat bereits Tamagawa den Fall affiner hyperbolischer Kurven in Charakteristik 0 bewiesen hat, siehe [Ta97] Thm 0.3; Mochizuki gelang es, die Einschränkung auf affine Kurven zu beseitigen, siehe [Mz96] Thm A und [Mz99] Thm A. Des weiteren hat der Autor in seiner Diplomarbeit bereits das Resultat Tamagawas auf den Fall eines endlich erzeugten Grundkörpers positiver Charakteristik ausgedehnt, siehe [Sx02a] Thm 3.2. Es bleibt also nur, den im Titel der Arbeit festgehaltenen Fall von projektiven (hyperbolischen) Kurven in positiver Charakteristik zu behandeln. Wir beschreiben im folgenden, wie dies geschehen soll.

Vorher wollen wir aber nicht zu erwähnen versäumen, daß der vorgeschlagene Beweis von Theorem 1.2 mit auflösbaren Quotienten auskommt. Wir notieren daher mit der Bezeichnung G^{solv} für den maximal pro-auflösbaren, stetigen Quotienten einer pro-endlichen Gruppe G das folgende Theorem.

Theorem 1.4. *Es sei K ein endlich erzeugter Körper der Charakteristik $p \geq 0$ mit algebraischem Abschluß $\overline{K}$. Es seien X, X' zwei glatte, hyperbolische, Kurven über K, von denen mindestens eine nicht isotrivial ist. Dann induziert der Funktor π_1 eine natürliche Bijektion*

$$\pi_1 : \mathrm{Isom}_{K,F_K^{-1}}\big(X, X'\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_K}\big(\pi_1(X_{\overline{K}})^{\mathrm{solv}}, \pi_1(X'_{\overline{K}})^{\mathrm{solv}}\big) \tag{1.3}$$

endlicher Mengen.

Der Beweis dieses Theorems besteht im wesentlichen im sorgfältigen Studium der vorliegenden Note und der beiden entscheidenden Arbeiten [Ta97] und [Ta02], in denen ebenso stets auflösbare Quotienten ausreichen. Insbesondere muß man beweisen, daß der auflösbare Quotient der zahmen Fundamentalgruppe einer affinen Kurve über einem endlichen Körper die Menge der abgeschlossenen Punkte charakterisiert.

1.3 Reduktion auf eine Retraktion

Zunächst gelingt eine wohlbekannte, formale Reduktion des Beweises von Theorem 1.2 darauf, eine Retraktion für die von π_1 auf den Mengen von Isomorphismen induzierte Abbildung konstruieren zu müssen. Die dabei relevanten gruppentheoretischen Eigenschaften, insbesondere das Verschwinden des Zentrums der geometrischen Fundamentalgruppe, können aus plausiblen geometrischen Annahmen gefolgert werden, welche für anabelsche Varietäten gelten sollen, vgl. [Sx02b] §4.2.1. Genauer reicht es aus, für jeden Galois-äquivarianten Isomorphismus von Fundamentalgruppen α für alle hinreichend großen n prim zur Charakteristik einen Isomorphismus $\lambda_n(\alpha)$ (mit evtl. Frobeniusnennern) der entsprechenden Kurven zu finden, so daß α und $\lambda_n(\alpha)$ auf Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ übereinstimmen.

Man hat nämlich das folgende Diagramm mit Kohomologiekoeffizienten $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Die benötigte, wohlbekannte, kanonische Identifikation von étaler Kohomologie mit der Gruppenkohomologie der Fundamentalgruppe für eigentliche, hyperbolische Kurven entnehme man [Sx02b] Appendix A. Aufgrund der topologischen Invarianz étaler Siten [SGA4] VIII kann die Abbildung H^* auf Isomorphismen mit Nennern aus Frobeniuspotenzen definiert werden.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Isom}_{K,F_K^{-1}}\big(X, X'\big) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, hook, "\mathrm{H}^*"] & \mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_K}\big(\pi_1(X_{\overline{K}}), \pi_1(X'_{\overline{K}})\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_K}\big(\mathrm{H}^*(X'_{\overline{K}}), \mathrm{H}^*(X_{\overline{K}})\big) \arrow[r, equal] & \mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_K}\big(\mathrm{H}^*(\pi_1(X'_{\overline{K}})), \mathrm{H}^*(\pi_1(X_{\overline{K}}))\big)
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Der linke vertikale Pfeil ist einem Resultat von Serre folgend mit [Sx02a] Prop 4.6 injektiv. Hieraus folgert man leicht, daß die a priori von n abhängige Abbildung $\lambda = \lambda_n$ in Wirklichkeit von diesem Unabhängig ist. Des weiteren ist λ automatisch ein Linksinverses zu π_1, dazu funktoriell, d.h. es gilt $\lambda(\alpha_1\alpha_2) = \lambda(\alpha_1)\lambda(\alpha_2)$ für komponierbare α_1, α_2, und in étalen G-Torsoren kompatibel. Genaueres zu G-Torsoren findet man in [Sx02a] §4.

Lemma 1.5. *Ein solches λ ist ein Inverses zu π_1.*

Beweis: Wir müssen nachweisen, daß $\pi_1(\lambda(\alpha)) = \alpha$ gilt. Nach Wahl von Faserfunktoren können wir α als Funktor

$$\alpha^* : \mathsf{Rev}(X'_{\overline{K}}) \to \mathsf{Rev}(X_{\overline{K}})$$

zwischen den Kategorien endlich étaler Überlagerungen auffassen. Für eine offene Untergruppe $H < \pi_1(X_{\overline{K}})$ bezeichne H' ihr Bild unter α. Dies ist durch Wahl der Faserfunktoren eindeutig. Denn bezeichnen wir mit Y_H (bzw. $Y'_{H'}$) die Überlagerung, welche zu $\pi_1(X_{\overline{K}})/H$ (bzw. $\pi_1(X'_{\overline{K}})/H'$) gehören, so gilt dann $\alpha^*(Y'_{H'}) = Y_H$.

Der Funktor $\lambda(\alpha)^* : \mathsf{Rev}(X'_{\overline{K}}) \to \mathsf{Rev}(X_{\overline{K}})$ ist natürlich isomorph zu α^* vermöge der Familie von Isomorphismen $\lambda(\alpha|_H) : \alpha^*(Y'_{H'}) = Y_H \xrightarrow{\sim} Y'_{H'}$, wobei H das System aller offenen Untergruppen von $\pi_1(X_{\overline{K}})$ durchläuft.

Da isomorphe Funktoren zwischen Galoiskategorien sich nur um einen inneren Automorphismus auf den entsprechenden Fundamentalgruppen unterscheiden, folgt somit die gesuchte Gleichheit von $\pi_1(\lambda(\alpha)) = \alpha$ und der Beweis des Lemma ist erbracht. □

Wir merken noch an, daß die Resultate [Sx02a] Lemma 4.1 und Lemma 4.3 es erlauben, die Retraktion λ_n nach einer galoisschen Konstantenkörpererweiterung oder aber auch dem Übergang zu einer zusammenhängenden Galoisüberlagerung zu bestimmen. Die gefundenen geometrischen Isomorphismen steigen dann erzwungenermaßen ab. Die Eigenschaft, nicht isotrivial zu sein, verträgt sich mit diesen Manipulationen, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 1.6. *Es sei $Y \to X$ eine endliche, étale Überlagerung eigentlicher hyperbolischer Kurven. Dann ist X isotrivial, genau dann wenn Y isotrivial ist.*

Beweis: Mit X ist auch Y isotrivial nach [SGA1] X 1.8. Umgekehrt nehmen wir nun an, daß Y isotrivial ist. Wir dürfen annehmen, daß Y/X Galoisüberlagerung ist. Nach einer endlichen Konstantenerweiterung dürfen wir weiter annehmen, daß G schon über einem endlichen Körper definiert ist, da das Automorphismengruppenschema einer hyperbolischen Kurve unverzweigt ist. Der entsprechende Quotient liefert ein Modell von $X_{\overline{K}}$ über einem endlichen Körper. □

1.4 Strategie und Methode — Destillat der Schwierigkeiten

Um nun zu einem gruppentheoretischen Isomorphismus α einen zugehörigen geometrischen Isomorphismus $\lambda(\alpha)$ zu konstruieren, dehnt man die Kurven zu einer Familie über einer Basis S aus, welche aus einer Varietät über einem endlichen Körper besteht. Ein Isomorphismus ist gefunden, wenn die zugehörigen darstellenden Abbildungen $\xi_i : S \to \mathscr{M}$ in den Modulraum der Kurven übereinstimmen, vorausgesetzt man arbeitet mit einem feinen Modulraum. Mittels Spezialisierung und Tamagawas Theorem der Grothendieck Vermutung der anabelschen Geometrie für hyperbolische Kurven über einem endlichen Körper beschreibt man das Bild von abgeschlossenen Punkten s und kontrolliert so ξ. Jedoch hat man mit diesem naiven Ansatz die folgenden drei Probleme:

(1) Der Modulraum der Kurven ist ein Stack, wir benötigen hingegen ein Schema.

(2) Das Resultat für Kurven über endlichen Körpern ist von absoluter Natur. Daher liefert es den Isomorphietyp der Kurve nur bis auf einen Frobenius-Twist. Dieser hängt a priori vom Punkt $s \in S$ ab.

(3) Das Resultat für Kurven über endlichen Körpern ist nur für affine, hyperbolische Kurven bekannt; unsere Kurven sind eigentlich.

Diese Probleme lösen wir wie folgt. (1) Der Gebrauch von Levelstrukturen verschafft uns ein feines Modulschema $\mathscr{M}_g[n]$ von glatten, projektiven Kurven vom Geschlecht g, welche mit einer Levelstruktur zum abelschen Level $n \geq 3$ prim zur Charakteristik ausgestattet sind, siehe [DM69] Thm 5.8, 5.14. Es ist aber ein leichtes, die Levelstruktur mittels der Fundamentalgruppe zu kontrollieren, denn $\mathrm{H}^1(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}\big(\pi_1(X_{\overline{K}}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big)$ und dies ist in Abschnitt 1.3 schon benutzt worden.

(2) Ein Frobenius-Twist komponiert die darstellende Abbildung mit einer Potenz des Frobenius, ändert also die topologische Komponente nicht. Wir kennen also immerhin die topologische Komponente der darstellenden Abbildung. In [Sx02a] Prop 2.3 wird bewiesen, daß zwei topologisch identische Abbildungen von einer irreduziblen und reduzierten Varietät über einem endlichen Körper in eine beliebige Varietät sich nur um eine globale Potenz des Frobenius unterscheiden. Somit ist auch dieses Problem bereits gelöst. Dies ist auch die Stelle, an der die Frobeniusnenner auftreten.

(3) Nur affine, hyperbolische Kurven über endlichen Körpern verwenden zu dürfen, stellt das unangenehmste Problem dar. Wir müssen degenerieren. Dazu arbeiten wir mit G-Galois Überlagerungen der generischen Faser, welche am gewählten Punkt der Basis S stabil degenerieren und arbeiten G-äquivariant. Ein Van Kampen Theorem erlaubt die Rekonstruktion der zahmen Fundamentalgruppe des glatten Teils von irreduziblen Komponenten der speziellen Faser. Auf diese können wir nun, wie oben beschrieben, Tamagawas Resultat anwenden. Hierbei ist es nötig, auch die arithmetische Aktion auf der zahmen Fundamentalgruppe zu erkennen. Ohne diese arithmetische Aktion hätte an dieser Stelle auch die kummersche Fundamentalgruppe zusammen mit dem Hauptresultat aus [Saï97] ausgereicht.

Die in dieser Arbeit gewählte Methode verwendet logarithmische Strukturen auf stabilen Kurven. Um das Van Kampen Theorem anwenden zu können, welches in [Sx04a] in abstrakter Form ausführlich behandelt wird, sind Ergebnisse aus der Abstiegstheorie für logarithmisch étale Überlagerungen nötig, für die wir auf [Sx04c] oder [Sx02b] §3.2 verweisen. Zum Zweck der Charakterisierung der logarithmischen Spezialisierungsabbildung benötigt man das Kriterium von logarithmisch glatter Reduktion von Kurven und ihrer Überlagerungen, vgl. [Sx04b].

In §2 beschäftigt uns die Geometrie der logarithmischen Fundamentalgruppe einer semistabilen Kurve über einem Körper bzw. einem logarithmischen Punkt. Einiges dort entstammt einer Arbeit von Mochizuki [Mz96], wird aber nun mittels eines Van Kampen Theorems der logarithmischen Geometrie ausgewertet. In §3 behandeln wir die logarithmische Spezialisierungsabbildung, und in §4 setzen wir alles zum Beweis von Theorem 1.2 zusammen.

2 Die Komponenten der speziellen Faser

Letztendlich werden wir stabile Kurven über einem henselschen, diskreten Bewertungsring studieren und aus der Fundamentalgruppe der generischen Faser auf die zahmen Fundamentalgruppen der Komponenten des glatten Orts der speziellen Faser schließen. Dazu müssen wir die Spezialisierungsabbildung der logarithmischen Fundamentalgruppe zwischen generischer und logarithmisch-spezieller Faser charakterisieren. Ein Van Kampen

Satz beschreibt nämlich die logarithmische Fundamentalgruppe der speziellen Faser als Amalgam entlang eines Graphen mit Gruppen. An die oben bereits erwähnten zahmen Fundamentalgruppen kommt man sodann in Form der Stabilisatoren der Aktion auf den irreduziblen Komponenten heran.

Definition 2.1. *Eine* **semistabile Kurve** *X über einem Schema S ist eine flache Abbildung $f : X \to S$ von endlicher Präsentation mit geometrisch zusammenhängenden Fasern und lokal in der étalen Topologie der Form entweder (a)* $\mathrm{Spec}(k[t])$ *bei $t = 0$ oder (b)* $\mathrm{Spec}(k[x,y]/xy)$ *bei $x, y = 0$.*

Punkte der Sorte (b) heißen **Doppelpunkte** *und beschreiben den* **singulären Ort** $\mathrm{Sing}(X/S)$ *der Abbildung f.* $\mathrm{Sing}(X/S)$ *ist das abgeschlossene Unterschema, welches durch das erste Fittingideal der Garbe $\Omega^1_{X/S}$ gegeben wird. Die Abbildung* $\mathrm{Sing}(X/S) \to S$ *ist quasi-endlich, unverzweigt und von endlicher Präsentation.*

Eine semistabile Kurve X über S heißt **stabil**, *falls sie eigentlich ist und die Gruppe der Automorphismen einer jeden geometrischen Faser endlich ist.*

2.1 Die Menge der irreduziblen Komponenten

Wir beginnen damit, nach Mochizuki [Mz96] §1 die Menge der irreduziblen Komponenten einer semistabilen Kurve über einem endlichen Körper zu charakterisieren.

Wir verwenden die Notation $\mathrm{Irr}(Z)$ für die Menge der irreduziblen Komponenten eines Schemas Z. Ferner bezeichne $\pi_1^{\mathrm{mock}}(Z)$ den maximalen Quotienten von $\pi_1(Z)$, welcher étale Überlagerungen beschreibt, die über den generischen Punkten der irreduziblen Komponenten total zerlegen. Mit G^ℓ (bzw. $G^{\mathrm{ab},\ell}$) bezeichnen wir den maximalen pro-ℓ (bzw. maximal abelschen pro-ℓ) Quotienten einer pro-endlichen Gruppe G. Damit läßt sich nun [Mz96] §1 zum folgenden Theorem zusammenfassen.

Theorem 2.2 (Mochizuki). *Es sei X/k eine eigentliche, semistabile, zusammenhängende Kurve über dem endlichen Körper k der Charakteristik $p \neq \ell$, und es sei $X_{\overline{k}} = \bigcup X_i$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Es bezeichne $\tilde{X}_i$ die Normalisierung von X_i. Dann ist die folgende kurze exakte Sequenz*

$$0 \to \bigoplus_{X_i \in \mathrm{Irr}(\overline{X})} \pi_1(\tilde{X}_i)^{\mathrm{ab},\ell} \to \pi_1(X_{\overline{k}})^{\mathrm{ab},\ell} \to \pi_1^{\mathrm{mock}}(X_{\overline{k}})^{\mathrm{ab},\ell} \to 0 \tag{2.5}$$

inklusive der direkten Summanden des Kerns gruppentheoretisch charakterisierbar ausgehend von der äußeren Gal_k*-Darstellung $\pi_1(X_{\overline{k}})^\ell$.*

Die kurze exakte Sequenz erhält man durch die Gewichtsfiltration des Frobenius auf der Abelisierung. Die Identifikation der direkten Summanden ist etwas diffiziler und in [Mz96] Prop 1.3 nur für den Quotienten modulo ℓ von (2.5) beschrieben. Allerdings läßt sich das dort angegebene Argument ohne Probleme ausweiten, vgl. [Sx02b] Thm 6.1.1.

Korollar 2.3. *Die äußere* Gal_k*-Darstellung $\pi_1(X_{\overline{k}})^\ell$ charakterisiert gruppentheoretisch die Menge $\{X_i \in \mathrm{Irr}(\overline{X}) \,|\, g_{X_i} > 0\}$ der Komponenten positiven Geschlechts.*

Um auch an die Komponenten von Geschlecht 0 heranzukommen, benötigt man Überlagerungen, die auch zahme Verzweigung über den Doppelpunkten zulassen. Dazu bemühen wir natürlicherweise vorhandene log Strukturen.

2.2 Semistabile Kurven über einem logarithmischen Punkt

Ab jetzt benutzen wir logarithmische Geometrie. Als grundlegende Quelle verweisen wir auf [Ka89] und [Il02], deren allgemein üblichen Notationen wir auch folgen.

Sei s das Spektrum eines Körpers k zusammen mit der fs-log Struktur $M_s \to \mathcal{O}_s$, welche von der Karte $\mathbb{N} \to k;\ 1 \mapsto 0$ induziert wird. Dieses s nennen wir einen logarithmischen Punkt. Für den globalen Schnitt $1 \in \mathbb{N} \subset M_s(s)$ schreiben wir auch π. Es bezeichne $\overline{s} = \mathrm{Spec}(\overline{k})$ einen geometrischen Punkt und $\tilde{s}$ einen log geometrischen Punkt von s. Die logarithmische Fundamentalgruppe $\pi_1^{\log}(s, \tilde{s})$ kürzen wir als $\pi^{\log}$ ab. Von der kanonischen, die log Struktur vergessenden Abbildung $\varepsilon : s \to \mathring{s}$ erhalten wir die folgende kurze exakte Sequenz

$$1 \to I^{\log} \to \pi^{\log} \to \mathrm{Gal}_k \to 1,$$

welche nach Wahl von π spaltet, so daß $I^{\log}$ als Gal_k-Modul kanonisch zum Tate-Twist $\hat{\mathbb{Z}}(1)\big(\overline{k}\big)$ über k isomorph ist.

Definition 2.4. *Die* **relative Dimension** $\dim_{\overline{x}}(f)$ *einer Abbildung $f : X \to S$ von fs-log Schemata im geometrischen Punkt $\overline{x} \in X$ über dem geometrischen Punkt $\overline{s} \in S$ ist definiert durch*

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\left(\overline{M}_X^{\mathrm{gp}}/f^*\overline{M}_S^{\mathrm{gp}}\right)_{\overline{x}} + \dim_{\overline{x}}\Big(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X,\overline{x}}/\alpha(M_{X,\overline{x}} \setminus M^*_{X,\overline{x}}) \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{S,\overline{s}}/\alpha(M_{S,\overline{s}} \setminus M^*_{S,\overline{s}})\Big).$$

Lemma 2.5. *Sei X/s log glatt von relativer Dimension 1. Dann ist X/s étale lokal isomorph zur Faser im Ort $\mathbb{N}_{>0} = 0$ von einem der beiden folgenden lokalen Modelle:*

(i) $\mathrm{Spec}(k[t]\big[\mathbb{N}\big]) \to \mathrm{Spec}(k[\mathbb{N}]),\ 1 \mapsto e$ *für ein $e \in \mathbb{N}$ bei $t = 0$, oder*

(ii) $\mathrm{Spec}(k[Q]) \to \mathrm{Spec}(k[\mathbb{N}]), 1 \mapsto q$ *für ein nicht verschwindendes $q \in Q$ bei $Q \setminus \{0\} = 0$ für einen einheitenfreien fs Monoid $Q \subset Q^{\mathrm{gp}} = \mathbb{Z}^2$. Dabei gilt, daß q nicht in $p \cdot Q$ enthalten ist, wobei p die Restklassencharakteristik ist.*

Beweis: Dies folgt sofort aus [Ka89] 3.5. □

Lemma 2.6. *Sei X/s geometrisch zusammenhängend, log glatt und von relativer Dimension 1. Dann ist das zugrundeliegende Schema $\mathring{X}_{\mathrm{red}}/\mathring{s}$ eine semistabile k-Kurve.* □

Definition 2.7. *Sei X/s log glatt von relativer Dimension 1. Eine* **Spitze** *ist ein Punkt vom Typ (ii) wie in Lemma 2.5, welcher kein Doppelpunkt von $\mathring{X}_{\mathrm{red}}/\mathring{s}$ ist. Mit* $\mathrm{Sing}(X/s)$ *bezeichnen wir das reduzierte, induzierte fs-log Schema bestehend aus der disjunkten Vereinigung aller Spitzen und aller Doppelpunkte* $\mathrm{Sing}\left(\mathring{X}_{\mathrm{red}}/\mathring{s}\right)(\overline{k})$ *von X.*

Lemma 2.8. *Sei X/s log glatt von relativer Dimension 1. Das Bild der Abbildung $M_X \to \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}$ enthält lokal in jeder Spitze oder Doppelpunkt $\overline{x}$ für jeden Zweig von $\mathring{X}$, welcher durch $\overline{x}$ verläuft, eine Uniformisierende in $\overline{x}$.* □

Lemma 2.9. *Sei X/s log glatt und von relativer Dimension 1. Ein Punkt $\overline{x} \in X$ vom Typ (ii) wie in Lemma 2.5 ist eine Spitze dann und nur dann, wenn die Karte $\mathbb{N} \to Q$ des lokalen Modells die 1 auf ein Vielfaches eines wesentlichen Erzeugers (auf dem Rand des Polytops) von Q als fs Monoid abbildet.*

Beweis: Nach Wahl eines Isomorphismus $Q^{\mathrm{gp}} = \mathbb{Z}^2$ identifizieren wir das Monoid Q mit den Punkten des Standardgitters in einem abgeschlossenen, rational definierten Winkelgebiet mit Scheitel am Ursprung. Die wesentlichen Erzeuger als fs Monoid sind die Punkte auf den Schenkeln des Winkels mit zueinander teilerfremden ganzzahligen Koordinaten. Der Rest folgt unmittelbar aus der Definition. □

Lemma 2.10. *Sei X/s log glatt und von relativer Dimension 1. Falls $Y \to X$ eine Kummer log étale Abbildung ist, so ist Y/s ebenfalls log glatt und von relativer Dimension 1. Falls darüberhinaus $Y \to X$ surjektiv ist, so hat Y genau dann Spitzen, wenn X Spitzen aufweist.*

Beweis: Dies folgt leicht aus [Il02] Example 4.7(b). □

Wie in der klassischen Situation gibt es für ein quasi-kompaktes, log geometrisch zusammenhängendes X/s die natürliche kurze exakte Sequenz

$$1 \to \pi_1^{\log}(X_{\bar{s}}) \to \pi_1^{\log}(X) \to \pi^{\log} \to 1 \ . \tag{2.6}$$

Im nächsten Abschnitt analysieren wir diese kurze exakte Sequenz für eine log glatte Kurve über dem logarithmischen Punkt.

2.3 Eine Anwendung des Van Kampen Satzes

Sei X/s log glatt von relativer Dimension 1. Es bezeichne $\mathrm{Irr}(X) = \{X_i\}$ die Menge der irreduziblen Komponenten von X. Wir versehen X_i mit der reduzierten, induzierten fs-log Schemastruktur. Mit Γ_X bezeichnen wir den dualen Graphen der zugrundeliegenden semistabilen Kurve $\overset{\circ}{X}_{\mathrm{red}}$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß alle Komponenten log-geometrisch irreduzibel sind und über k glatte zugrundeliegende Schemata haben. Des weiteren fordern wir, daß alle Doppelpunkte bereits rational über k sind.

Die natürliche Abbildung $f : \coprod X_i \to X$ und seine Faser $f_{\bar{s}} : \coprod X_{i,\bar{s}} \to X_{\bar{s}}$ im logarithmischen Sinne sind effektive Abstiegsmorphismen für die Kategorie der Kummer étalen Überlagerungen, vgl. [Sx02b] Thm 3.2.20 oder besser [Sx04c].

Dies führt wie in [Sx04a] Example 8 beschrieben zu einer logarithmischen Variante von [Sx04a] Corollary 5.2 und damit zu einer Amalgamzerlegung entlang des dualen Graphen für zwei Gruppen aus der Sequenz (2.6). Wir erhalten einen natürlichen Isomorphismus von (2.6) mit der folgenden Sequenz:

$$1 \to \frac{\left(\mathop{\ast}\limits_{\mathrm{Irr}(X)} \pi_1^{\log}(X_{i,\bar{s}}) * \widehat{\pi}_1(\Gamma_X)\right)}{\text{Kantenrelationen}} \to \frac{\left(\mathop{\ast}\limits_{\mathrm{Irr}(X)} \pi_1^{\log}(X_i) * \widehat{\pi}_1(\Gamma_X)\right)}{\text{Kantenrelationen}} \to \pi^{\log} \to 1. \tag{2.7}$$

Kozykelrelationen treten in diesem Fall nicht auf, da es gemäß Lemma 2.6 keine Punkte gibt, die auf drei der Komponenten gleichzeitig liegen. Wir beschreiben nun die Kantenrelationen etwas sorgfältiger.

Sei $x \in \mathrm{Sing}(X/s)$ ein Doppelpunkt und bezeichne X_0, X_1 die Komponenten von X, welche durch x verlaufen. Im Abstiegsdatum, welches zur obigen Van Kampen-Formel führt, ist x ein Simplex im Grad 1 und trägt die von X induzierte log Struktur. Genauer gibt es einen einheitenfreien fs Monoid $Q \subset \mathbb{Z}^2$, eine Karte $Q \to k$, $(Q \setminus \{0\}) \mapsto 0$ und ein nichtverschwindendes Element $q \in Q$, welches der Pullback von π unter $x \to s$ ist. Somit ist kanonisch $\pi_1^{\log}(x_{\bar{s}})$ isomorph zu $\mathrm{Hom}(Q^{\mathrm{gp}}/\langle q\rangle, \hat{\mathbb{Z}}(1)(\overline{k}))$ und damit frei vom Rang 1 über $\hat{\mathbb{Z}}(1)\big(\overline{k}\big)$. Die Inklusion $i_\nu : x \hookrightarrow X_\nu$ für $\nu = 0, 1$ induziert Abbildungen von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1^{\log}(x_{\tilde{s}}) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1^{\log}(x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi^{\log} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1^{\log}(X_{\nu,\tilde{s}}) \arrow[r] & \pi_1^{\log}(X_\nu) \arrow[r] & \pi^{\log} \arrow[r] & 1 .
\end{tikzcd}$$

In Korrollar 2.12 werden wir sehen, daß die vertikalen Abbildungen sogar injektiv sind. Natürlich müssen diese Abbildungen mittels derselben Basispunkte konstruiert werden, die implizit bei der Anwendung des Van Kampen Satzes Verwendung fanden.

Zum Doppelpunkt x gehört eine Kante e_x des Graphen Γ_X und dies führt zu einem ebenso bezeichneten Element in der pro-endlichen Komplettierung der kombinatorischen Fundamentalgruppe des dualen Graphen $\widehat{\pi}_1(\Gamma_X)$. Die Kantenrelation verlangt nun das Folgende: für alle $\gamma \in \pi_1^{\log}(x)$ (bzw. $\gamma \in \pi_1^{\log}(x_{\tilde{s}})$) gilt

$$i_{0,\#}(\gamma) e_x = e_x i_{1,\#}(\gamma),$$

wobei $i_{\nu,\#}$ für $\nu = 0, 1$ die entsprechend von i_ν auf den Fundamentalgruppen induzierte Abbildung bezeichnet.

Die linke Gruppe in der Sequenz (2.7) stimmt mit der Gruppe π_1^{kum} in [Saï97] Thm 2.8 kanonisch überein, nur daß wir diesmal durch die Sequenz auch die Galoisoperation auf diesem Amalgam beschreiben können.

2.4 Die Stabilisatoren

Die Notationen und Annahmen des vorherigen Abschnitts gelten weiterhin.

Lemma 2.11. *Bezeichne D_i den Divisor $X_i \cap \mathrm{Sing}(X/s)$ der Doppelpunkte und Spitzen auf X_i und $M_i = M(\log D_i)$ die assoziierte fs-log Strukture auf $\mathring{X}_i$. Dann gilt:*

(1) Es gibt eine eindeutige Abbildung von fs-log Schemata $f : X_i \to (\mathring{X}_i, M_i)$, welche als Identität auf den zugrundeliegenden Schemata wirkt.

(2) Die Abbildung f aus (a) induziert eine Abbildung von kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1^{\log}(X_{i,\tilde{s}}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \pi_1^{\log}(X_i) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \pi^{\log} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1^{\mathrm{t}}(X_{i,\overline{s}}, D_{i,\overline{s}}) \arrow[r] & \pi_1^{\mathrm{t}}(X_i, D_i) \arrow[r] & \mathrm{Gal}_k \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

mit surjektiven vertikalen Abbildungen und identischen Kernen.

Beweis: (1) Es reicht aus, f étale lokal in den Doppelpunkten und Spitzen zu konstruieren, da f außerhalb die Abbildung mit $\varepsilon : X_i \to \mathring{X}_i$ übereinstimmen muß. Im Punkt $\overline{x} \in \mathrm{Sing}(X/s) \cap X_i$ besitzt die log Struktur M_i eine Karte $\mathbb{N} \to \mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{X_i,\overline{x}}$, derart daß 1 auf eine Uniformisierende von X_i in $\overline{x}$ abgebildet wird. Nach Lemma 2.8 sind Uniformisierende im Bild der Exponentialabbildung der fs-log Struktur auf X_i. Man überzeugt sich leicht, daß sie ein eindeutiges Urbild haben. Dies definiert f eindeutig.

(2) Die Abbildung f aus (1) ist verträglich mit $\varepsilon : s \to \overset{\circ}{s}$ und $\pi_1^{\log}(\overset{\circ}{X}_i, M_i) = \pi_1^{\mathrm{t}}(X_i, D_i)$, vgl. [Il02] Example 4.7(c). Somit müssen wir nur noch die geometrischen Anteile der kurzen exakten Sequenzen miteinander vergleichen. Sei $U = X_i \setminus D_i$ mit der von X_i induzierten fs-log Struktur. Dann ist mit $\pi_1^{\log}(U) \twoheadrightarrow \pi_1(\overset{\circ}{U})$ und $\pi_1(\overset{\circ}{U}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(X_i, D_i)$ auch $\pi_1^{\log}(f)$ surjektiv. Um auch die Injektivität nachzuweisen, dürfen wir strikt étale lokal arbeiten, und wir schließen mittels [Il02] Example 4.7(b). □

Korollar 2.12. *Die Abbildungen $\pi_1^{\log}(x_{\tilde{s}}) \to \pi_1^{\log}(X_{i,\tilde{s}})$ (bzw. $\pi_1^{\log}(x) \to \pi_1^{\log}(X_i)$) der Kantengruppen in die Eckengruppen des pro-endlichen Amalgamdatums in obiger Van Kampen-Formel (2.7) sind injektiv.* □

Korollar 2.13. *Die äußere $\pi^{\log}$-Darstellung $\pi_1^{\log}(X_{i,\tilde{s}})$ charakterisiert gruppentheoretisch die äußere Gal_k-Darstellung $\pi_1^{\mathrm{t}}(X_{i,\overline{s}}, D_{i,\overline{s}})$.*

Beweis: $I^{\log}$ operiert trivial. □

Proposition 2.14. *Die natürliche Abbildung $i_{\#} : \pi_1^{\log}(X_i) \to \pi_1^{\log}(X)$ ist injektiv. Ihr Bild besteht aus den Stabilisatoren der Monodromieaktion von $\pi_1^{\log}(X)$ auf der Menge der Komponenten $\varprojlim_{Y/X} \mathrm{Irr}(Y)$ der universell Kummer étalen Überlagerung in einer Komponente $\hat{X}_i$ über X_i (welche durch eine implizit in (2.7) vorhandene Basispunktwahl festgelegt wird).*

Beweis: Der Stabilisator von $\hat{X}_i$ ist nach Konstruktion das Bild von $i_{\#}$, wenn man X_i mit einer universell Kummer étalen Überlagerung als Basispunkt ausstattet, die $\hat{X}_i$ dominiert. Es reicht also aus, die Injektivität nachzuweisen.

Gemäß des Satzes von Van Kampen haben wir eine Zerlegung von $\pi_1^{\log}(X)$ als ein pro-endliches Amalgam von pro-endlichen Gruppen entlang eines endlichen Graphen. Die Abbildung $i_{\#}$ ist daher ein projektiver Limes der folgenden Art. Es gibt ein projektives System von Amalgamdaten endlicher Gruppen entlang eines fixierten endlichen Graphen. Die Abbildungen $i_{\#}$ ist der projektive Limes der natürlichen Abbildung der Eckengruppe an einer fixierten Ecke in die pro-endliche Komplettierung des entsprechenden Amalgams.

Wir verwenden nun die Tatsache aus Korollar 2.12, daß die Abbildungen der Kantengruppen in die Eckengruppen injektiv sind. Eine einfache Modifikation von [Di80] II 2.6 sowie 2.7 erlaubt uns nun nachzuweisen, daß die natürliche Abbildung der Eckengruppe in die pro-endliche Komplettierung des Amalgams entlang des fixierten endlichen Graphen von endlichen Gruppen tatsächlich injektiv ist. Dies beweist die Proposition da projektive Limiten von injektiven Abbildungen selbst injektiv sind. □

3 Die logarithmische Spezialisierungsabbildung

Sei S im folgenden ein exzellenter, henselscher diskreter Bewertungsring mit endlichem Restklassenkörper k und Quotientenkörper K. Wir statten S mit der durch den abgeschlossenen Punkt $s = \mathrm{Spec}(k)$ induzierten, natürlichen log Struktur $M(\log s)$ aus. Der Punkt s mit induzierter log Struktur ist dann ein logarithmischer Punkt; die Wahl einer Uniformisierenden π legt eine Karte fest wie in Abschnitt 2.2.

Sei X/S eine semistabile Kurve mit glatter generischer Faser. Durch die spezielle Faser $V(\pi) = X_s$ erhält X eine log Struktur und der Morphismus $X \to S$ reichert sich eindeutig zu einer log glatten Abbildung von relativer Dimension 1 zwischen log regulären fs-log Schemata an.

Sei $\overline{\eta}$ ein fester geometrischer Punkt über dem generischen Punkt η von S und $\tilde{s}$ der dadurch festgelegte log-geometrische Punkt mit Zentrum in s. Analog zum klassischen Fall gibt es eine Spezialisierungsabbildung der log Fundamentalgruppen:

$$\mathrm{sp}_{\log} : \pi_1^{\log}(X_{\overline{\eta}}) \to \pi_1^{\log}(X_{\tilde{s}}).$$

Wir streben nun eine logarithmische Variante von [Ta97] Thm 5.7 an.

Lemma 3.1. *Sei X/S eine semistabile Kurve wie oben, welche mit der standard fs-log Struktur $M(\log X_s)$ versehen ist. Dann ist die reduzierte spezielle Faser $Y_{s,\mathrm{red}}$ einer Kummer étalen Überlagerung Y/X eine semistabile Kurve über einer endlichen Erweiterung des Resklassenkörpers von S.*

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.6 und Lemma 2.10. □

Proposition 3.2. *Sei X/S wie oben und zusätzlich eigentlich und stabil vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann läßt sich die Menge der irreduziblen, geometrischen Komponenten $\mathrm{Irr}(X_{\overline{s}})$ der speziellen Faser gruppentheoretisch aus der äußeren Gal_K-Darstellung $\pi_1(X_{\overline{\eta}})^{\ell}$ charakterisieren.*

Beweis: Nach [Vi02] Thm I.2.2 gilt $\pi_1(X_{\overline{\eta}})^{\ell} = \pi_1^{\log}(X_{\tilde{s}})^{\ell}$. Sei Y_η/X_η eine étale Galoisüberlagerung mit einer ℓ-Gruppe als geometrischer Decktransformationsgruppe. Gemäß des eben zitierten Isomorphismus dehnt Y_η/X_η zu einer Kummer étalen Überlagerung Y/X aus. Die reduzierte spezielle Faser $Y_{s,\mathrm{red}}$ von Y ist nach Lemma 3.1 semistabil über einer Erweiterung von s.

Es bezeichne Γ_Y den dualen Graphen von $Y_{s,\mathrm{red}}$. Aus (2.7) und Lemma 2.11 erhalten wir eine exakte Sequenz von $\mathrm{Gal}_K/P \cong \pi^{\log}$ Moduln (P ist die wilde Trägheitsgruppe)

$$0 \to \mathrm{H}_1^{\mathrm{CW}}\big(\Gamma_Y, \mathbb{Z}_\ell(1)\big) \to \pi_1^{\log}(Y_{\tilde{s},\mathrm{red}})^{\mathrm{ab},\ell} \to \pi_1(Y_{\overline{s},\mathrm{red}})^{\mathrm{ab},\ell} \to 0\ . \tag{3.8}$$

Diese Sequenz wird durch die Frobeniusgewichtsfiltration, also durch die Galoiswirkung, gruppentheoretisch charakterisiert. Nun wenden wir Theorem 2.2, genauer das zugehörige Korollar an, und wissen so, daß die äußere Gal_K-Darstellung $\pi_1(Y_{\overline{\eta}})^{\ell}$ die Menge der irreduziblen Komponenten $\{Y_i \in \mathrm{Irr}(Y_{\overline{s}}) \,|\, g_{Y_i} > 0\}$ positiven Geschlechts bestimmt.

Wir lassen Y/X unter allen Möglichkeiten variieren. Die natürlichen Abbildungen zwischen den entsprechenden pro-ℓ abelisierten Sequenzen (3.8) induziert kompatible Abbildungen auf der Menge der direkten Summanden in der Sequenz aus Theorem 2.2. Somit kontrollieren wir für einander dominierende, galoissche Überlagerungen $Y'/Y/X$ die Inklusion

$$\{Y_i \in \mathrm{Irr}(Y_{\overline{s}}) \,|\, g_{Y_i} > 0\}/\overline{\mathrm{Gal}}(Y/X) \hookrightarrow \{Y_i' \in \mathrm{Irr}(Y_{\overline{s}}') \,|\, g_{Y_i'} > 0\}/\overline{\mathrm{Gal}}(Y'/X).$$

Hier bezeichnet $\overline{\mathrm{Gal}}$ die entsprechende geometrische Monodromiegruppe, deren Wirkung aufgrund der gruppentheoretischen Charakterisierung im wesentlichen durch Konjugation gruppentheoretisch vermittelt wird. Im Limes entdecken wir

$$\mathrm{Irr}(X_{\overline{s}}) = \varinjlim_{\substack{Y/X \\ \text{geometrisch } \ell \text{ Galois}}} \{Y_i \in \mathrm{Irr}(Y_{\overline{s}}) \,|\, g_{Y_i} > 0\}/\overline{\mathrm{Gal}}(Y/X).$$

Es gewinnt nämlich eine jede rationale Komponente C in einer geeigneten Überlagerung durch zahme Verzweigung in den Doppelpunkten an Geschlecht und wird sichtbar. Tatsächlich kann man durch mock-Überlagerungen sich zunächst auf den Fall glatter Komponenten reduzieren. Sodann finden Lemma 2.11 und Proposition 2.14 Anwendung, in dem sie zeigen, daß kofinal alle Überlagerungen von C mit ausschließlich zahmer Verzweigung in den Doppelpunkten auch tatsächlich in geeigneten Y/X als Komponenten auftreten. Die Annahme der Stabilität läßt nun das Geschlecht gegen unendlich streben. $\square$

Korollar 3.3. *Sei X/S eine eigentliche, stabile Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann sind in der äußeren Gal_K-Darstellung $\pi_1(X_{\overline{\eta}})$ die folgenden numerischen Invarianten der speziellen Faser gruppentheoretisch charakterisiert: (1) die Euler-Charakteristik $\chi(\Gamma_X)$ des dualen Graphen (2) die Anzahl der irreduziblen Komponenten und (3) die geometrische Anzahl der Doppelpunkte.*

Beweis: Es gilt (1) $\chi(\Gamma_X) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}_\ell} \mathrm{H}_1^{\mathrm{CW}}\big(\Gamma_X, \mathbb{Z}_\ell(1)\big)$, (2) $\# \operatorname{Irr}(x_{\overline{s}})$ is die Kardinalität der Menge aus Proposition 3.2 und schließlich (3) $\# \operatorname{Sing}\big(X/S\big)(\overline{k}) = \# \operatorname{Irr}(X_{\overline{s}}) - \chi(\Gamma_X)$. $\square$

Theorem 3.4 (Charakterisierung von $\mathrm{sp}_{\log}$). *Sei X/S eine eigentliche, stabile Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, welche nicht glatt ist im klassischen Sinn.*

Dann ist die äußere $\pi^{\log}$-Darstellung $\pi_1^{\log}(X_{\tilde{s}})$ gruppentheoretisch charakterisiert in der äußeren Gal_K-Darstellung $\pi_1(X_{\overline{\eta}})$. Es gilt genauer, daß der Kern von $\mathrm{sp}_{\log}$ der Schnitt aller offenen Normalteiler $H \lhd \pi_1(X_{\overline{\eta}})$ ist, die den folgenden Bedingungen genügen:

(i) H ist eine äußere Unterdarstellung zu einer offenen Untergruppe von Gal_K, die zu einer zahmen Erweiterung von K (d.h. einer Kummer étalen Überlagerung von S) gehört.

(ii) Die Operation der wilden Trägheitsgruppe $P < \mathrm{Gal}_K$ (also der p-Sylowgruppe der Trägheitsgruppe $I = \ker(\mathrm{Gal}_K \to \mathrm{Gal}_k)$), welche nach (i) auf H existiert, ist trivial auf $H^{\mathrm{ab},\ell}$ für eine Primzahl $\ell \neq p$.

(iii) Für eine hinreichend verzweigte, zahme Erweiterung S'/S zu den Funktionenkörpern K'/K, so daß $\mathrm{Gal}_{K'}$ auf H operiert, gilt folgendes: die Aktion der Decktransformationsgruppe $\pi_1(X_{\overline{\eta}})/H$ auf den Doppelpunkten der speziellen Faser der zu H gehörenden Kurve Y/S' hat ausschließlich Stabilisatoren mit trivialer p-Sylowgruppe.

Bevor wir mit dem Beweis beginnen, bemerken wir, daß die Bedingung (iii) nach den Vorarbeiten tatsächlich gruppentheoretisch ist. Nach Korollar 3.3 ist nämlich die Anzahl der Doppelpunkte gruppentheoretisch. Eine nichtverschwindende, unfrei operierende Untergruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der Decktransformationsgruppe führte aber zu einem $H \lhd H_1 < \pi_1(X_{\overline{\eta}})$ mit zugehörigen Kurven Y/S' und Y_1/S', so daß Y/Y_1 eine $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Galois Überlagerung ist, welche der gruppentheoretisch nachprüfbaren Gleichung

$$\operatorname{Sing}(Y/S)(\overline{k}) = p \cdot \operatorname{Sing}(Y_1/S)(\overline{k})$$

widerspricht. Hierbei ist es wesentlich, daß man die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser von Y/S als Menge kontrolliert, denn nur so kann man im dualen Graphen zum $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-Quotienten Y_1 von Y die Menge der Ecken kontrollieren. Da die Euler-Charakteristik bekannt ist, ergibt sich so die Anzahl der Kanten von Y_1.

Beweis: Ein H, welches den Kern von $\mathrm{sp}_{\log}$ umfaßt, gehört zu einer Überlagerung, welche zu einer Kummer étalen Überlagerung von X ausdehnt. Diese ist log-glatt über S, damit gilt mit [Sx04b] Thm 1.2 Teil (i) und (ii) der Bedingungen. Die lokale Struktur von Kummer étalen Überlagerungen, wie sie etwa in [Il02] Example 4.7(b) beschrieben wird, verhindert, daß der lokale Abbildungsgrad durch p teilbar ist. Dies zeigt (iii).

Nun nehmen wir umgekehrt an, daß wir ein H gegeben haben, welches die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wir müssen zeigen, daß die zugehörige über einer Erweiterung S'/S mit Funktionenkörpern K'/K definierte Kurve Y_η/K' eine Ausdehnung Y/S' zu einer Kummer étalen Überlagerung von X/S besitzt.

Zunächst hat Y_η nach [Sx04b] Thm 1.2 ein log glattes Modell Y/S' über S'. Offenbar ist S'/S zahm und sogar ohne Einschränkung so stark verzweigt, daß Y/S' ein semistabiles Modell hat. Der Quotient $X' = Y/G$ von Y nach der Decktransformationsgruppe $G = \pi_1(X_{\overline{\eta}})/H$ ist wegen Raynauds Analyse im Appendix zu [Ra90] ebenfalls ein semistabiles Modell von X_η. Zwei solche Modelle sind über logarithmische Aufblasungen miteinander verbunden und haben demnach gemäß [Il02] Thm 6.10 isomorphe logarithmische Fundamentalgruppen. Es reicht also, den Quotient $Y \to Y/G$ als Kummer étale zu erkennen. Wegen Abhyankars Lemma und Zariski–Nagata Reinheit reicht es, dies in den Dopelpunkten zu tun. Hier benutzen wir, daß X/S nicht glatt ist: jede Komponente enthält Doppelpunkte und kann somit generisch nicht wild verzweigen. In den Doppelpunkten folgt es aus der genauen Inspektion des Beweises des bereits zitierten Resultats [Ra90] Appendix. □

Proposition 3.5. *Sei X/S eine eigentliche, stabile Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, welche nicht im klassischen Sinne glatt ist. Über die spezielle Faser nehmen wir an, daß die reduzierten irreduziblen Komponenten $X_{i,s}$ von X_s glatt und geometrisch zusammenhängend über k sind, und daß alle Doppelpunkte k-rational sind. Sei D_i der Divisor* $\mathrm{Sing}(X/S) \cap X_{i,s}$ *auf $X_{i,s}$.*

Dann ist die äußere Gal_k*-Darstellung* $\pi_1^{\mathrm{t}}(X_{i,\overline{s}}, D_{i,\overline{s}})$ *in der äußeren* Gal_K*-Darstellung* $\pi_1(X_{\overline{\eta}})$ *gruppentheoretisch charakterisiert.*

Beweis: Zunächst einmal erlaubt es Theorem 3.4, die logarithmische Fundamentalgruppe $\pi_1^{\log}(X_s)$ zu charakterisieren. Für ein kofinales System von Kummer étalen Überlagerungen Y/X, also offenen Untergruppen von $\pi_1^{\log}(X_s)$, nutzen wir Proposition 3.2, um $\mathrm{Irr}\, Y_s$ als Menge zu charakterisieren. Gleichzeitig charakterisieren wir (im wesentlichen durch Konjugation) die Operation von of $\pi_1^{\log}(X_s)$ auf $\varprojlim_{Y/X,\mathrm{két}} \mathrm{Irr}(Y_s)$, der pro-endlichen Menge der Komponenten der universell Kummer étalen Überlagerung von X_s. Wir wählen eine Komponente $\hat{X}_{i,s}$ über $X_{i,s} \in \mathrm{Irr}(X_s)$ und betrachten den Stabilisator der $\pi_1^{\log}(X_s)$ Operation. Gemäß Proposition 2.14 stimmt dieser Stabilisator kanonisch mit $\pi_1^{\log}(X_{i,s})$ überein, was seinerseits nach Korollar 2.13 die äußeren Gal_k-Darstellung $\pi_1^{\mathrm{t}}(X_{i,\overline{s}}, D_{i,\overline{s}})$ festlegt. □

4 Die Retraktion aus punktweiser Degeneration

4.1 Konstruktion der Retraktion

Wir nehmen die Argumentation aus Abschnitt 1.3 wieder auf. Um den Beweis des Theorems 1.2 zu vollenden, müssen wir nur eine Retraktion λ für π_1 beschreiben, die kompatibel mit der Wirkung auf Levelstrukturen ist. Wir fixieren ein $n \geq 3$ prim zur Charakteristik.

Seien also X und X' Kurven über K wie in Theorem 1.2. Dann dürfen wir nach galoisscher Konstantenerweiterung annehmen, daß beide Kurven ein Levelstruktur zulassen, d.h. die n-Torsion auf der zugehörigen Jacobischen rational ist.

Sei α ein Isomorphismus in $\mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_K}\big(\pi_1(X_{\overline{K}}), \pi_1(X'_{\overline{K}})\big)$. Wir wählen auf X eine n-Levelstruktur und transportieren diese mittels α auf X'. Daraufhin dehnen wir alle Daten auf eine irreduzible, reguläre Basis S von endlichem Typ über $\mathbb{F}_p$ aus, d.h. wir identifizieren X und X' mit den generischen Fasern von glatten projektiven S-Kurven mit n-Levelstruktur. Gemäß unserer Strategie wollen wir die zugehörigen darstellenden Abbildungen ξ_X und $\xi_{X'} : S \to \mathscr{M}_g[n]$ vergleichen. Dies liefert das folgende Theorem, dessen Beweis wir zurückstellen.

Theorem 4.1. *Sei $S/\mathbb{F}_p$ irreduzibel, regulär und von endlichem Typ mit generischem Punkt η. Sei $n \in \mathbb{N}$ invertierbar auf S. Sei X/S eine glatte, eigentliche, nicht isotriviale Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, welche mit einer n Levelstruktur versehen ist.*

Dann ist für abgeschlessene Punkte $s \in S$ der Isomorphietyp der Faser X_s als glatte, eigentliche Kurve mit n Levelstruktur bis auf einen Frobeniustwist durch die äußere $\mathrm{Gal}_{\kappa(\eta)}$-Darstellung $\pi_1(X_{\overline{\eta}})$ gruppentheoretisch charakterisiert.

Es sind also nach Theorem 4.1 die speziellen Fasern X_s und X'_s als Kurven mit Levelstruktur isomorph, jedenfalls bis auf einen Frobenius-Twist. Dieser hat den Effekt, die darstellende Abbildung mit einer Potenz des Frobenius zu komponieren. Der Exponent hängt allerdings a priori vom abgeschlossenen Punkt ab. Nichtsdestotrotz stimmen die topologischen Komponenten von ξ_X und $\xi_{X'}$ überein. Somit gelangt [Sx02a] Prop. 2.3 zur Anwendung, und es gibt natürliche Zahlen m, m' mit $\xi_X \circ \mathrm{Frob}^m = \xi_{X'} \circ \mathrm{Frob}^{m'}$. Für die generischen Fasern wiederum zeigt dies die Existenz eines Isomorphismus von K-Kurven bis auf Frobeniusnenner, welcher die gegebene n-Levelstruktur respektiert, und dies ist $\lambda(\alpha)$. Man überzeugt sich leicht, daß die eingangs getroffene Wahl der Levelstruktur die Konstruktion nicht beeinflußt, da die unterschiedlichen Wahlen von der kanonischen Aktion durch $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ineinander überführt werden können. Dies konstruiert die Retraktion λ und beschließt den Beweis von Theorem 1.2. □

4.2 Degeneration

Wir wenden uns nun dem Beweis von Theorem 4.1 zu, in dessen Verlauf wir dank eines Resultats von Tamagawa Überlagerungen degenerieren lassen werden.

Beweis von Theorem 4.1: Wir fixieren einen abgeschlossenen Punkt $s \in S$. Nach Wahl einer geeignet allgemeinen Parameterfolge $(t_1, \ldots, t_n)$ in $\mathcal{O}_{S,s}$, so daß X/S eingeschränkt auf den Ort $\{t_1 = \ldots = t_{n-1} = 0\}$ immer noch nicht isotrivial ist (beobachte die charakterisierende Abbildung in den Modulraum), dürfen wir wegen Theorem [Ta97] 5.7 annehmen, daß S von Dimension 1 ist. Jetzt ersetzen wir S durch seine Henselisierung in s. Nach [Ta02] Thm 8.1 gibt es eine étale Überlagerung Y_η der generischen Kurve X_η, welche **keine** gute Reduktion (als Überlagerung) über X hat. Wir wählen diese G-Galois und arbeiten von nun an implizit G-äquivariant.

Aus dem Theorem über stabile Reduktion von Kurven folgt, daß wir nach eventueller endlicher Basiserweiterung von S annehmen dürfen, daß Y_η ein stabiles Modell Y/S besitzt. Diese Basiserweiterung stört nicht, da wir äquivariant arbeiten und etwa mittels [Sx02a] Lemma 4.1 wieder absteigen können.

Unser Ziel wird nun sein, die Komponenten des glatten Orts der speziellen Faser Y_s zu beschreiben und in Zusammenhang mit X_s zu bringen. Dazu wählen wir Y noch etwas vorsichtiger, nämlich so, daß bereits alle Komponenten von Y_s glatt und geometrisch irreduzibel sind (vgl. die Diskussion gegen Ende des Beweises zu Proposition 3.2). Zunächst stellen wir fest, daß in Proposition 3.2 und Proposition 3.5 bereits die Menge der irreduziblen Komponenten $Y_{s,i}$ von Y_s und die entsprechenden äußeren Galoisdarstellungen der zahmen Fundamentalgruppe der Komponenten $U_{s,i} \subset Y_{s,i}$ des glatten Orts von Y_s charakterisiert wurden. Dies sind Fundamentalgruppen **affiner** hyperbolischer Kurven über einem endlichen Körper. Somit charakterisiert uns [Ta97] Thm 0.3 (vgl. [Sx02a] Thm 3.2) diese Komponenten bis auf einen Frobenius-Twist.

Da wir auch die Operartion von $\mathrm{Aut}(Y_\eta/X_\eta)$ auf der Menge der irreduziblen Komponenten (das stabile Modell ist eindeutig) und mithin die Stabilisatoren G_i von $Y_{s,i}$ kontrollieren, beherrschen wir auch die Quotienten $U_{s,i}/G_i$. Eine einfache Überlegung zum Vertauschen von Quotientenbilden mit abgeschlossenen Immersionen zusammen mit dem bereits benutzen Resultat aus [Ra90] Appendix, daß Quotienten semistabiler Kurven wieder semistabil sind, sehen wir, daß $U_{s,i}/G_i$ universell homöomorph zu entweder einem offenen Teil von $\mathbb{P}^1$ oder X_s ist. Universelle Homöomorphie bei glatten Kurven bedeutet aber nichts anderes als isomorph zu einem Frobenius-Twist. Damit haben wir den Isomorphietyp von X_s in der Hand.

Es fehlt also nur noch, nachzuweisen, daß die durch die gruppentheoretische Charakterisierung (dies ist der Pfeil c im folgenden Diagramm) bestimmte Isomorphie (mit evtl. Frobeniusnennern) zweier Kurven auch die vorhandenen n-Levelstrukturen respektiert. Dies ist genau der Gehalt des abschließenden Lemma, welches damit den Beweis von Theorem 4.1 beschließt. $\square$

Lemma 4.2. *Mit den obigen Notationen ist das folgenden Diagramm kommutativ.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_{\kappa(\eta)}}\big(\pi_1(X_{\overline{\eta}}), \pi_1(X'_{\overline{\eta}})\big) \arrow[r, "c"] \arrow[d] & \mathrm{Isom}_{\kappa(s), F^{-1}_{\kappa(s)}}\big(X_s, X'_s\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_{\kappa(\eta)}}\big(\pi_1(X_{\overline{\eta}})^{\mathrm{ab}}/n, \pi_1(X'_{\overline{\eta}})^{\mathrm{ab}}/n\big) \arrow[r, "\sim", "\mathrm{sp}"'] & \mathrm{Isom}_{\mathrm{Gal}_{\kappa(\eta)}}\big(\pi_1(X_{\overline{s}})^{\mathrm{ab}}/n, \pi_1(X'_{\overline{s}})^{\mathrm{ab}}/n\big)
\end{tikzcd}$$

Der Pfeil c faßt die Konstruktion aus Abschnitt 4.2 zusammen und sp *wird induziert von den Spezialisierungshomomorphismen der beteiligten Fundamentalgruppen.*

Beweis: Sei α ein Isomorphismus der Fundamentalgruppen der generischen Fasern. Wir müssen zeigen, daß $\mathrm{sp} \circ \alpha = \pi_1(c(\alpha)) \circ \mathrm{sp}$ gilt. Eine genaue Inspektion der Konstruktion von $c(\alpha)$ liefert das folgende Diagramm von Subquotienten von äußeren Galoisdarstellungen.

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\overline{s},i}) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\overline{s},i}/G_i) \arrow[dd, two heads] \\
\pi_1(Y_{\overline{\eta}}) \arrow[r, two heads, "\mathrm{sp}_{\log}"] \arrow[d] & \pi_1^{\log}(Y_{S^{\mathrm{sh}}}) \arrow[d] & \pi_1^{\log}(Y_{\tilde{s}}) \arrow[l, "\sim"'] & \\
\pi_1(X_{\overline{\eta}}) \arrow[r, two heads, "\mathrm{sp}"] & \pi_1(X_{S^{\mathrm{sh}}}) & & \pi_1(X_{\overline{s}}) \arrow[ll, "\sim"']
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Ein ebensolches erhalten wir auch für die zu X' gehörenden ' Versionen. Vermöge der Resultate Theorem 3.4, [Ta97] Thm 5.7 und Proposition 3.5 induziert α abgesehen von der Position rechts oben im Diagramm (4.9) Abbildungen von äußeren Galoisdarstellungen zwischen dem ungestrichenen und dem gestrichenen Diagramm, nämlich die Einschränkungen von α auf charakteristische Subquotienten. Diese bezeichnen wir ebenfalls mit α.

Von der Abbildung $c(\alpha)$ wissen wir eigentlich nur, daß sie bis auf radizielle Anteile der Quotient einer Abbildung ist, die mit α auf $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{s,i})$ übereinstimmt. Demnach machen an der Stelle β sowohl α als auch $\pi_1(c(\alpha)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{\overline{s},i}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \pi_1(X_{\overline{s}}) \arrow[d, "\beta"] \\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U'_{\overline{s},i}) \arrow[r] & \pi_1(X'_{\overline{s}}) \end{tikzcd}$$

kommutativ. Dominante Abbildungen von Kurven induzieren offene Abbildungen auf Fundamentalgruppen. Daher stimmen α und $\pi_1(c(\alpha))$ wenigstens auf einer offenen Untergruppe H von $\pi_1(X_{\overline{s}})$ (bzw. H') überein. Nach eventueller Verkleinerung sind H und H' Normalteiler. Mittels der Techniken über G-Torsore aus [Sx02a] §4 erhalten wir eine kanonische Identifikation

$$\pi_1(X_{\overline{s}}) = \mathrm{Aut}(H) \times_{\mathrm{Out}(H)} \pi_1(X_{\overline{s}})/H$$

und entsprechend für die ' Version, die mit Isomorphismen verträglich ist, welche H auf H' abbilden. Solche Isomorphismen spalten demnach auf. Die eine Komponente auf $\mathrm{Aut}(H)$ wird durch Konjugation mit der Einschränkung auf H vermittelt; hier stimmen α und $\pi_1(c(\alpha))$ also überein. Die andere Komponente auf $\pi_1(X_{\overline{s}})/H$ wird ebenso von der Einschränkung auf H bestimmt, da der Zentralisator von H in $\pi_1(X_{\overline{s}})$ trivial ist, und somit die Projektion $\pi_1(X_{\overline{s}})/H \to \mathrm{Out}(H)$ injektiv ist. Damit stimmen α und $\pi_1(\alpha)$ überein und das Lemma ist bewiesen. □

Entscheidend für die letzten Argumente war die strikte Zentrumsfreiheit der anabelschen Fundamentalgruppe. Diese Eigenschaft, daß der Zentralisator einer jeden offenen Untergruppe trivial ist, hat de Jong zu der Definition geführt, solche Gruppen anabelsch zu nennen. Sie läßt sich ganz allgemein für die Fundamentalgruppe einer eigentlichen, glatten Varietät beweisen, falls diese nicht verschwindende Euler-Charakteristik besitzt und zweitens ihre étale Kohomologie mit lokal konstanten Torsionskoeffizienten mit der entsprechenden Kohomologie der Fundamentalgruppe übereinstimmt.

Literatur

[Di80] Dicks, W., *Groups, trees and projective modules*, LNM **790**, Springer, 1980.

[DM69] Deligne, P., Mumford, D., The irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. IHES* **36** (1969), 75–109.

[Gr83] Grothendieck, A., Brief an Faltings (27/06/1983), in: *Geometric Galois Action 1* (ed. L. Schneps, P. Lochak), LMS Lecture Notes **242**, Cambridge 1997, 49–58.

[Il02] Illusie, L., An overview of the work of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology, *Astérisque* **279** (2002), 271–322.

[Ka89] Kato, K., Logarithmic structures of Fontaine–Illusie, in *Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory*, Johns Hopkins University Press (1989), 191–224.

[Mz96] Mochizuki, S., The profinite Grothendieck conjecture for closed hyperbolic curves over number fields, *J. Math. Sci. Tokyo* **3** (1996), 571–627.

[Mz99] Mochizuki, S., The local pro-p anabelian geometry of curves, *Invent. Math.* **138**, No. 2, (1999), 319–423.

[Ra90] Raynaud, M., p-groupes et réduction semi-stable des courbes, in: *The Grothendieck Festschrift, Vol. III* (ed. P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Y. Manin and K. A. Ribet.), Prog. Math. **88**, Birkhäuser (1990), 179–197.

[Saï97] Saïdi, M., Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe de groupes, *Compositio Math.* **107** (1997), 319–338.

[SGA1] Grothendieck, A., Mme. Raynaud, M., *Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*, LNM **224**, Springer, 1971.

[SGA4] Artin, M., Grothendieck, A., Verdier, J. L., *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*, LNM **269**, **270**, **305**, Springer, 1972-1973.

[Sx02a] Stix, J., Affine anabelian curves in positive characteristic, *Compositio Math.* **134** (2002), 75–85.

[Sx02b] Stix, J., Projective anabelian curves in positive characteristic and descent theory for log-étale covers, *Bonner Mathematische Schriften* **354** (2002).

[Sx04a] Stix, J., A general Seifert–Van Kampen theorem for algebraic fundamental groups, Preprint, Bonn 2004.

[Sx04b] Stix, J., A logarithmic view towards semistable reduction, *J. Algebraic Geometry* (electronic, 2004).

[Sx04c] Stix, J., Descent theory for log-étale covers, Preprint in Vorbereitung.

[Ta97] Tamagawa, A., The Grothendieck conjecture for affine curves, *Compositio Math.* **109** (1997), 135–194.

[Ta02] Tamagawa, A., Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental goups, *J. Algebraic Geometry* **13** (2004), 675–724.

[Vi02] Vidal, I., Contributions à la cohomologie étale des schémas et des log schémas, *thèse*, Paris, 2002.