

Algebraische und topologische Methoden in der Diskreten Mathematik

<http://tinygu.de/AlgTopDM20>

5. Übungsblatt — Besprechung 8. Februar 2020

per Email an manecke@math.uni-frankfurt.de

Falls Sie einen Hinweis zu einer Aufgabe benötigen, fragen Sie uns.

Aufgabe 1. Seien $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}^n$ eine Basis von \mathbb{R}^n und sei

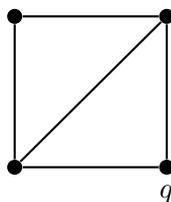
$$B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} := \{\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n : 0 \leq \mu_i < 1\},$$

d.h. \mathcal{P} ist das von den Spalten von B aufgespannte Fundamentalparallelepiped. Eine **elementare Spaltenoperation** bezeichnet eine der folgenden Operationen: das Vertauschen von zwei Spalten, das Addieren von Spalte j auf Spalte i und das Multiplizieren von einer Spalte mit dem Skalar -1 .

- i) Zeigen Sie, dass wenn B' aus B durch elementare Spaltenoperationen entsteht, dass dann $|\det B| = |\det B'|$ und $\Lambda(B) = \Lambda(B')$ ($\Lambda(B)$ bezeichnet das von den Spalten von B aufgespannte Gitter).
- ii) Zeigen Sie, dass B sich durch elementare Spaltenoperationen in eine untere Dreiecksmatrix B' überführen lässt. **Hinweis:** Lemma von Bézout.
- iii) Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n| = |\det B|$. **Hinweis:** $B^{-1} \cdot \mathcal{P} = [0, 1)^n$.

Aufgabe 2. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $q \in V$. Beweisen Sie, dass der in der Vorlesung angegebene Algorithmus eine Bijektion zwischen Spannbäumen von G und und superstabilen Konfigurationen des Chip-Firing Prozesses auf G mit Senke q liefert, in dem Sie für die Inverse einen Algorithmus angeben, der zu einem gegebenen Baum T die superstabile Konfiguration berechnet.

Aufgabe 3. Sei $G = (V, E)$ und $q \in V$ wie folgt gegeben:



Bestimmen Sie alle kritischen und superstabilen Konfigurationen und geben Sie für jeden Spannbaum von G die korrespondierende superstabile Konfiguration an.

Aufgabe 4. Sei C_n der Zykel-Graph mit n Knoten und sei ein Knoten q die Senke (siehe Abbildung). Bestimmen Sie alle kritischen und superstabilen Konfigurationen.

