Algebraische und topologische Methoden in der Diskreten Mathematik

<http://tinygu.de/AlgTopDM20>

3. Übungsblatt — Besprechung 25. Januar 2020

per Email an manecke@math.uni-frankfurt.de

Falls Sie einen Hinweis zu einer Aufgabe benötigen, fragen Sie uns.

Aufgabe 1. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, $|V| = n$, $|E| = m$. Sei σ eine **azyklische Orientierung**, d.h. eine Orientierung von G ohne gerichtete Kreise.

- i) Sei σ eine azyklische Orientierung und $v \in V$ eine **Quelle**, also ein Knoten ohne eingehende Kanten. Zeigen Sie, dass die Orientierung σ' , die aus σ entsteht, in dem man alle zu v inzidenten Kanten umdreht, azyklisch ist.
- ii) Sei $c = (c_1, \dots, c_n)$ eine Konfiguration mit $c_i = \text{outdeg}_\sigma(i)$, also c_i gleich der Anzahl an ausgehenden Kanten vom Knoten i in der (azykl.) Orientierung σ . Zeigen Sie, dass c nicht stabilisiert.

Aufgabe 2. Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, $|V| = n$. Für eine stabilisierende Konfiguration c des Chip-Firing Games (ohne Senke), bezeichnen wir mit c° ihren stabilen Endzustand. Es seien $c, d, e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ Chip-Konfigurationen, wobei $c, d+e$ und $c+(d+e)^\circ$ stabilisierend sind. Zeigen Sie, dass auch $c+d, c+d+e$ und $(c+d)^\circ + e$ stabilisierend sind und dass gilt:

$$((c+d)^\circ + e)^\circ = (c+d+e)^\circ = (c+(d+e)^\circ)^\circ.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten den unendlichen Graphen $G = (\mathbb{Z}^2, E)$, wobei

$$E = \{(i, j), (i', j')\} : |i - i'| + |j - j'| = 1\},$$

d.h. jeder Knoten (i, j) ist mit seinen vier Nachbarn $(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1), (i, j-1)$ verbunden. Sei $c = (c_{i,j} : (i, j) \in \mathbb{Z}^2)$ eine Chip-Konfiguration auf G mit einer endlichen Anzahl $N = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} c_{i,j} < \infty$ an Chips.

- i) Zeigen Sie, dass nur endlich viele Konfigurationen von c durch den Chip-Firing-Prozess erreicht werden können.
- ii) Zeigen Sie, dass c stabilisiert. **Hinweis:** Betrachten Sie die Größe

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} c_{i,j} (i+j)^2.$$

Alternativ, verwenden Sie einen Satz der Vorlesung!

Aufgabe 4. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und q die Senke. Sei c eine stabile Konfiguration.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) c ist kritisch.
- (ii) $c = \text{stab}(c + b)$ für ein $b \in \mathbb{Z}^V$ mit $b_v > 0$ für alle $v \neq q$.
- (iii) $c = \text{stab}(c + Mb)$ für alle $M \in \mathbb{N}$ und für ein $b \in \mathbb{Z}^V$ mit $b_v > 0$ für alle $v \neq q$.
- (iv) $c = \text{stab}(c + L(G) \cdot e_q)$.
- (v) Sei $c_{\max} \in \mathbb{Z}^V$, $(c_{\max})_v := \deg(v) - 1$. Dann ist $c = \text{stab}(c_{\max} + b)$ für ein $b \in \mathbb{Z}^V$ mit $b_v > 0$ für alle $v \neq q$.
- (vi) Für alle $I \subseteq V \setminus \{q\}$ gibt es ein $j \in I$, so dass $c_j \geq |\{ij \in E : i \in I \setminus \{j\}\}|$.