

Algebraische und topologische Methoden in der Diskreten Mathematik

<http://tinygu.de/AlgTopDM20>

2. Übungsblatt — Abgabe 7. Dezember 2020
per Email an manecke@math.uni-frankfurt.de

Falls Sie einen Hinweis zu einer Aufgabe benötigen, fragen Sie uns.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass jedes Brot (ohne Belag) in der Ebene mit zwei geraden Schnitten in vier gleich große Teile zerlegt werden kann.

Aufgabe 2. Die Momentenkurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist gegeben durch

$$\gamma(x) := (x, x^2, x^3, \dots, x^{d-1}, x^d).$$

- i) Zeigen Sie, dass für alle $t_1 < t_2 < \dots < t_{d+1}$ die Punkte $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_{d+1})$ affin unabhängig sind.
- ii) Zeigen Sie, das Necklace-Splitting-Theorem mithilfe des (diskreten) Ham-Sandwich Theorem. Nehmen Sie dafür an, dass das Halsband auf der Momentenkurve liegt.

Aufgabe 3. Seien μ_1, μ_2, μ_3 Borel-Maße auf $\mathbb{R}^2$, die auf Geraden und Kreisen das Maß 0 annehmen. Jeder Kreis K hat ein Inneres K^- und ein Äußeres K^+ . Zeigen Sie, dass es eine Gerade oder einen Kreis gibt, die/der alle drei Maße halbiert.

Aufgabe 4. Sei P ein zentralsymmetrisches Polygon (d.h. für alle $x \in P$ ist $-x \in P$). Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von P mit Eckenmenge V und ohne neue Ecken im Rand von P . Sei $c : V \rightarrow \{+1, -1, +2, -2\}$ eine Färbung von V , so dass für jede Ecke v von P gilt, dass $-c(v) = c(-v)$ (gegenüberliegende Ecken erhalten gegensätzliche Farben). Zeigen Sie, dass es dann eine Kante uv in der Triangulierung $\mathcal{T}$ gibt, so dass $c(u) = -c(v)$.

Hinweis: Versuchen Sie ähnlich wie beim Lemma von Sperner, einen geeigneten Weg im dualen Graphen der Triangulierung zu finden.