WiSe 2020/21
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Algebraische und topologische Methoden in der Diskreten Mathematik

http://tinygu.de/AlgTopDM20

1. Übungsblatt — Abgabe 23. November 2020
per Email an manecke@math.uni-frankfurt.de

Aufgabe 1. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher (keine Schleifen, keine doppelten Kanten) und planarer Graph. Unter der Bedingung, dass alle Flächen von G bei gegebener Einbettung Dreiecke sind (auch die äußere Fläche), zeigen Sie die folgende Variante des Satzes von Sperner:

Sei $c : V \to \{1, 2, 3\}$ eine Knotenfärbung von G. Dann ist die Anzahl der Flächen mit paarweise verschieden gefärbten Knoten gerade.

Aufgabe 2. Sei T ein Dreieck mit Ecken v_1, v_2, v_3. Seien S_1, S_2, S_3 drei abgeschlossene Teilmengen von T, so dass

- $v_1 \in S_1$, $v_2 \in S_2$, $v_3 \in S_3$,
- $[v_1, v_2] \subseteq S_1 \cup S_2$, $[v_1, v_3] \subseteq S_1 \cup S_3$, $[v_2, v_3] \subseteq S_2 \cup S_3$ und
- $T = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

Zeigen Sie, dass dann $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \varnothing$.

Aufgabe 3. Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Polygon mit Eckenmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{T}$ eine Unterteilung von P in Dreiecke mit Eckenmenge V. Sei $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. Wir nennen eine Abbildung $c : V \to [n]$ eine Spernerfärbung, wenn $c(v_i) = i$ für alle $i \in [n]$ und $c(v) \in \{i, j\}$ für alle $v \in V \cap [v_i, v_j]$ wobei $[v_i, v_j]$ eine Kante von P ist.
Zeigen Sie, dass für jede solche Sperner-Färbung mindestens $n - 2$ Dreiecke in $\mathcal{T}$ existieren, die paarweise verschieden gefärbte Ecken haben.