GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2018/19
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Diskrete und Konvexe Geometrie

`http://tinygu.de/DKG18`

10. Übungsblatt — Abgabe 6. Februar 2019

Aufgabe 1.

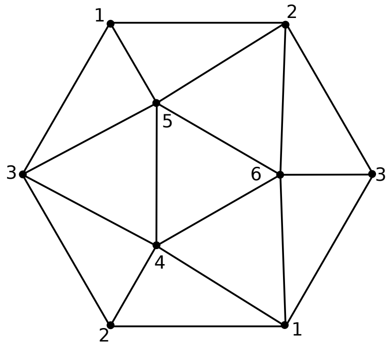
i) Geben Sie explizite Bedingungen an wann $O = (O_0, O_1, O_2)$ eine O-Sequenz ist. **Hinweis:** Interpretieren Sie einen vermeintlichen Multikomplex Ψ als Graph.

ii) Überprüfen Sie ob $(1,3,4,3,1)$, $(1,3,5,4,1)$, $(1,5,4,5,1)$, $(1,4,10,4,1)$ h-Vektoren von simplizialen Polytopen sind.

iii) Sei P das 4-dimensionale zyklische Polytop auf 8 Ecken. Finden Sie einen Multikomplex Ψ mit $O(\Psi) = g(P)$. **Hinweis:** Sie dürfen für die Berechung von $g(P)$ auch SAGE benutzen.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Gegeben sei der folgende 2-dimensionale Simplizialkomplex K mit 6 (!) Ecken. (Beachten Sie die Identifizierungen am Rand!).



i) Berechnen Sie $h(K)$.

ii) Ist K partitionierbar?

iii) Ist K schälbar?
Hinweis: Betrachten Sie den letzten Simplex einer potentiellen Schälung.

(10 Punkte)

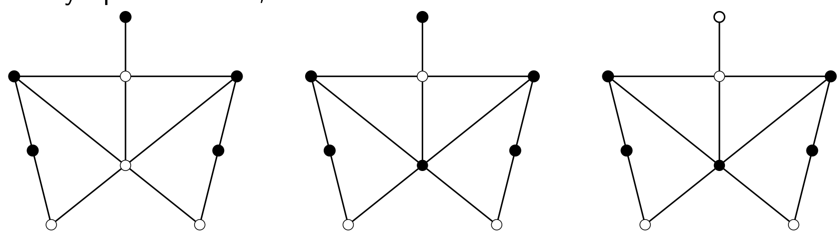
Aufgabe 3. Sei P ein einfaches Polytop und $\mathcal{O}$ eine gute Orientierung auf $G(P)$.

i) Zeigen Sie, dass eine Anordnung der Ecken $V(P) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ existiert, so dass es keinen gerichteten Weg in $\mathcal{O}$ von v_j nach v_i gibt, für $i < j$.

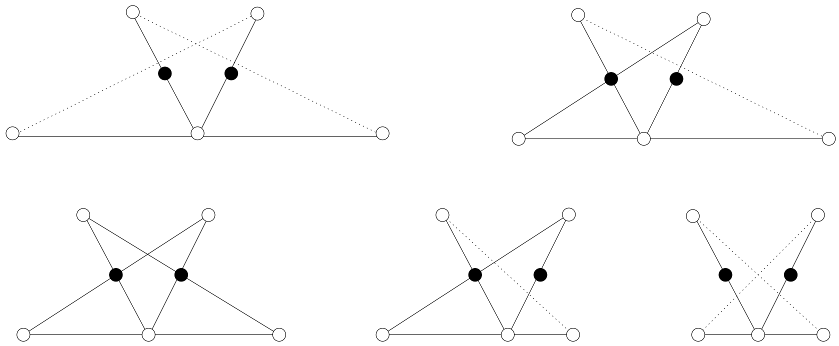
ii) Zeigen Sie, dass $v_1^\diamond, \ldots, v_n^\diamond$ eine Schälung von $\partial(P^\triangle)$ ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. i) Welche der folgenden Punktkonfigurationen sind affine Gale-Diagramme von Polytopen? Warum, warum nicht?



ii) Betrachten Sie die folgenden Diagramme. Überprüfen Sie, dass es affine Gale-Diagramme sind und konstruieren Sie die dazugehörigen Polytope.



(10 Punkte)

Aufgabe 5. Die folgenden Vektor-Konfigurationen V_i sind jeweils Gale-Transformierte eines Polytops P_i:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie die Anzahl der Facetten von P_i.

ii) Für welche i ist P_i simplizial?

iii) Für welche i ist P_i nachbarschaftlich?

iv) Für welche (i, j) gilt $P_i \cong P_j$?

(10 Punkte)

Aufgabe 6. i) Sei $P = \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_n) \subset \mathbb{R}^d$ ein d-dimensionales Polytop. Zeigen Sie, dass $P' = \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ genau dann eine Pyramide über P ist, wenn jede Gale-Transformierte von P' von der Form $G' = (g_1, \ldots, g_n, 0)$ ist, wobei $G = (g_1, \ldots, g_n)$ eine Gale-Transformierte von P ist.

ii) Für $m, n \geq 2$ betrachten Sie

$$G_{m,n} = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ times}}, \underbrace{\tfrac{-1}{m}, \ldots, \tfrac{-1}{m}}_{m \text{ times}}).$$

Zeigen Sie, dass G die Gale-Transformierte eines Polytops $P_{m,n}$ ist. Beschreiben Sie $P_{m,n}$.

Hinweis: Denken Sie an freie Summen.

iii) Wie viele kombinatorisch verschiedene d-Polytope mit $d+2$ Ecken gibt es?

(10 Punkte)

Bonus 7. Für zwei endliche Teilmengen $A, B \subset \mathbb{N}$ schreiben wir $A \leq B$ genau dann, wenn $\max(A \setminus B) \leq \max(B \setminus A)$ (mit der Konvention $\max(\varnothing) = -\infty$). Für jedes $k \geq 0$ definiert das eine totale Ordnung auf $\binom{\mathbb{N}}{k}$. Für $B \in \binom{\mathbb{N}}{k}$ schreiben wir $\binom{\mathbb{N}}{k}_{<B}$ für die Menge aller $A \in \binom{\mathbb{N}}{k}$ mit $A<B$.

i) Sei $B = \{b_1 + 1 < b_2 + 1 < \cdots < b_k + 1\} \subset \mathbb{N}$. Zeigen Sie,

$$\left| \binom{\mathbb{N}}{k}_{<B} \right| = \binom{b_k}{k} + \binom{b_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{b_1}{1}.$$

ii) Folgern Sie daraus, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ Zahlen $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ gibt mit

$$N = \binom{b_k}{k} + \binom{b_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{b_1}{1}.$$

iii) Für $B \in \binom{\mathbb{N}}{k}$ sei $m = \min(B)$. Zeigen Sie, dass

$$\partial \binom{\mathbb{N}}{k}_{<B} = \binom{\mathbb{N}}{k-1}_{<B \setminus m}$$

und damit

$$\partial_k(N) = \binom{b_k}{k-1} + \binom{b_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{b_1}{0}.$$

(10 Punkte)