WiSe 2018/19
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Diskrete und Konvexe Geometrie

http://tinygu.de/DKG18

9. Übungsblatt — Abgabe 23. Januar 2019

Aufgabe 1. Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein einfaches d-Polytop und sei $H = \{x : w^t x = 1\}$ eine Hyperebene, die P im Inneren schneidet und so dass $V(P) \cap H = \{v\}$.

i) Für $\varepsilon > 0$ sei $H^{\pm} = \{x : w^t x = 1 \pm \varepsilon\}$. Zeigen Sie, dass für ε hinreichend klein $P^{\pm} = P \cap H^{\pm}$ zwei einfache $(d-1)$-dimensionale Polytope sind.

Die d zu v inzidenten Kanten werden von H^- in Punkten $U^- = \{u_1^-, \dots, u_k^-\}$ und von H^+ in Punkten $U^+ = \{u_1^+, \dots, u_{d-k}^+\}$ geschnitten. Wir nehmen an, dass $k \le d-k$ ist.

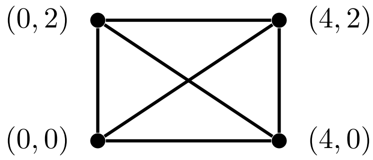
ii) Zeigen Sie, dass

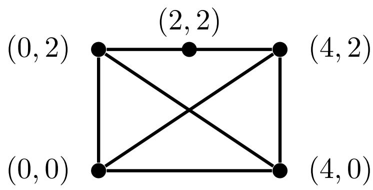
$$h(P^+) - h(P^-) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, \underbrace{1, \dots, 1}_{d-2k}, 0, \dots, 0)\,.$$

Hinweis: Sei $L = \{x : c^t x = \delta\}$ die Hyperebene mit $U^+ \cup U^- \subseteq L$ und $v \in L^{<}$. Betrachten Sie die Orientierungen auf P^+ und P^- die durch eine kleine Pertubation von c entstehen.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Für einen Graphen $G = (V, E)$ sei $\Phi : U \to \mathbb{R}^E$ wie in der Vorlesung. Bestimmen Sie für die beiden folgenden Gerüste die $|E| \times |U|$-Matrix $R(G, p)$ und bestimmen Sie welche Gerüste infinitesimal starr ist.





(10 Punkte)

Aufgabe 3. Ein reiner 1-dimensionaler Simplizialkomplex Γ ist ein einfacher Graph ohne isolierte Knoten.

i) Bestimmen Sie, wann der h-Vektor $h(\Gamma)$ nicht negativ ist.

ii) Bestimmen Sie, wann Γ partitionierbar ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $\mathsf{K}_{m,n} \subset 2^{[m]\times[n]}$ der $(m \times n)$-Schachbrett-Komplex für $m \le n$.

i) Bestimmen Sie den f-Vektor $f(\mathsf{K}_{m,n})$.

ii) Für welche (m, n) ist $\mathsf{K}_{m,n}$ eine Pseudomannigfaltigkeit? Wann ist $\mathsf{K}_{m,n}$ stark zusammenhängend?

Für Vektoren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^d$ sei $\mathcal{I} \subseteq 2^{[m]}$ definiert wie in der Vorlesung.

iii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ ein reiner und stark zusammenhängender Simplizialkomplex ist.

(10 Punkte)