WiSe 2018/19
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Diskrete und Konvexe Geometrie

http://tinygu.de/DKG18

8. Übungsblatt — Abgabe 16. Januar 2019

Aufgabe 1. Sei $Q \subset \mathbb{R}^d$ ein spitzes Polyeder.

i) Zeigen Sie, dass es eine Hyperebene H gibt, so dass alle beschränkten Seiten von Q in $H^<$ liegen und H jede unbeschränkte Seite von Q trifft.

ii) Zeigen Sie, dass $Q \cap H^\leq$ ein Polytop ist.

iii) Bestimmen Sie $\chi(Q)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. i) Finden Sie einen einfachen Weg um den h-Vektor für den Simplex Δ_d und den Würfel C_d zu berechnen.

ii) Für ein nicht-einfaches Polytop P können wir $h_i(P)$ über den f-Vektor definieren. Stimmt es, dass $h_i(P) \geq 0$ ist?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d)$ eine Permutation auf $[d]$. Ein Index $1 \leq i < d$ ist ein **Descent**, falls $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. Sei Π_{d-1} das $(d-1)$-dimensionale Permutaeder, also die konvexe Hülle über alle Permutationen σ von $[d]$.

i) Zeigen Sie, dass zwei Permutationen σ, σ' genau dann benachbart sind, wenn sie sich um Vertauschen von i und $i+1$ für ein $i \in [d]$ unterscheiden.

ii) Zeigen Sie, dass $h_i(\Pi_{d-1})$ die Anzahl $A(d,i)$ von Permutationen mit genau i Descents ist. **Hinweis**: Wählen Sie eine geeignete lineare Funktion $\ell(x)$.

iii) Folgern Sie, dass $A(d,i) = A(d, d-i-1)$.

(10+3 Punkte)

Aufgabe 4. i) Zeigen Sie, dass kein 4-Polytop mit $f_0 = 6$ und $f_1 = 12$ existiert.
Hinweis: Treffen Sie Aussagen zum gesamten f-Vektor.

ii) Geben Sie ein Beispiel eines 4-zusammenhängenden, 4-regulären [1] Graphen welcher nicht der Graph eines 4-Polytops ist.

iii) Für $\dim P = 4$, bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass ein 4-Polytop mit $f_0(P) = 6$ und $f_1(P) = n$ existiert. Geben Sie ein P jeweils an.

(10 Punkte)

Aufgabe 5. i) Überprüfen Sie, dass die Dehn-Sommerville Gleichungen für $d = 4$ äquivalent zu $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) = 0$ und $d\, f_0(P) = 2 f_1(P)$ sind.

ii) Finden Sie für $d = 5$ eine lineare Gleichung welche aus den Dehn-Sommerville Gleichungen folgt, aber unabhängig von der Euler-Gleichung und $2f_1(P) = 5f_0(P)$ ist.

(10 Punkte)

[1] d.h. an jedem Knoten treffen sich 4 Kanten

Aufgabe 6. Für $d \geq 1$ und $1 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ sei

$$Q_{d,i} \;:=\; \mathrm{prism}^{(d-i)}(\Delta_i) \;=\; C_{d-i} \times \Delta_i$$

das $(d-i)$-fache Prisma über einem i-Simplex.

i) Bestimmen Sie $f(Q_{d,i})$ und $h(Q_{d,i})$ für alle i.

ii) Folgern Sie, dass es keine weiteren linearen Gleichungen der f-Vektoren von einfachen d-Polytopen neben den Dehn-Sommerville-Gleichungen gibt.

iii) **Bonus:** Folgern Sie ii) mit den Polytopen $\Delta_i \times \Delta_{d-i}$ für $i = 0, \ldots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$.

(10+3 Punkte)

Bonus 7. Ein d-Polytop P heißt **kubisch**, falls jede seiner Facetten kombinatorisch isomorph zum Würfel C_{d-1} ist.

i) Zeigen Sie, dass die Eckenfigur P/v ein simpliziales Polytop ist.

Wir definieren den **kurzen kubischen h-Vektor** $h^{sc}(P) = (h_0^{sc}, \ldots, h_{d-1}^{sc})$ eines kubischen Polytops durch

$$h_i^{sc}(P) := \sum_{v \in V(P)} h_i(P/v)\,.$$

ii) Bestimmen Sie $f(P)$ aus $h^{sc}(P)$.

iii) Zeigen Sie, dass $h_i^{sc}(P) = h_{d-1-i}^{sc}(P)$ für $0 \leq i < d$ und

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i h_i^{sc} = 2^{d-1} + (-2)^{d-1}\,.$$

iv) Finden Sie für $d = 3, 4, 5$ (und gern auch allgemein) kubische d-Polytope $P_1, \ldots, P_m$, $m = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, die zeigen, dass die affine Hülle der f-Vektoren von kubischen Polytopen durch die Gleichungen in iii) gegeben sind[2]

(+10 Punkte)

Bonus 8. Sei P ein zentralsymmetrisches d-Polytop, d.h. $P = -P$. Zeigen Sie, dass

$$f_0(P) + f_1(P) + \cdots + f_d(P) \geq 3^d$$

i) für $d = 2$ (Trivial.)

ii) für $d = 3$ (Interessant.)

iii) für $d = 4$ (Schwierig!)

iv) für $d \geq 5$ (Offen!!)

Hinweis: Versuchen Sie, d-Polytope P für $d = 3, 4, 5$ zu konstruieren, welche recht nah am Gleichheitsfall sind.

(+3+9+27+81 Punkte)

[2] Eine "einfache" Konstruktion in allen Dimensionen ist nicht bekannt aber vielleicht nicht so schwierig. Wenn Sie Interesse haben zu diesem Thema mehr zu machen, dann melden Sie sich!