

Diskrete und Konvexe Geometrie

<http://tinygu.de/DKG18>

7. Übungsblatt — Abgabe 19. Dezember 2018

Aufgabe 1. Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein voll-dimensionales Polytop. Für eine Ecke $v \in V(P)$ sei H eine Hyperebene, die v strikt von $\text{conv}(V \setminus v)$ trennt, so dass $v \in H^\leq$. Wir bezeichnen mit $\text{trunc}(P, v) := P \cap H^\geq$ das *Abschneiden von v von P* .

- i) Wie hängen $f(\text{trunc}(P, v))$, $f(P)$ und $f(P/v)$ zusammen?
- ii) Zu einer Facette F von P gibt es eine duale Operation

$$\text{stack}(P, F) := \text{trunc}(P^\Delta, F^\diamond)^\Delta.$$

Beschreiben Sie $\text{stack}(P, F)$ geometrisch und bestimmen Sie den f -Vektor $f(\text{stack}(P, F))$.

- iii) Bestimmen Sie für alle $(f_0, f_1, f_2) \in \mathbb{Z}^3$ mit $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ und $f_0 \leq 2f_2 - 4$ und $f_2 \leq 2f_0 - 4$ ein 3-Polytop mit diesem f -Vektor.

Hinweis: Nutzen Sie die beschriebenen Operationen für Pyramiden.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei P ein einfaches 3-Polytop und sei $p_k(P)$ die Anzahl an k -eckigen 2-Seiten.

- i) Zeigen Sie, dass gilt:

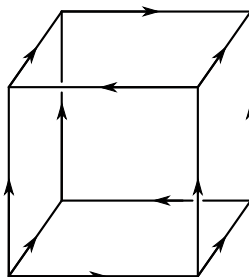
$$(1) \quad \sum_{k \geq 3} (6 - k) p_k(P) = 12.$$

- ii) Finden Sie einen Vektor $(p_3, p_4, \dots, p_n)$, welcher (1) erfüllt, aber nicht der Anzahl an k -eckigen 2-Seiten eines einfachen 3-Polytops entspricht.

Hinweis: Setzen Sie $p_6 = 1$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Gegeben Sei die folgende azyklische Orientierung $\mathcal{O}$ des Graphen des Standardwürfels $C_3 = [0, 1]^3$.



- i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ gut ist.
- ii) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ nicht durch eine lineare Funktion $\ell(x)$ auf C_3 induziert wird.
- iii) **Bonus:** Gibt es ein 3-Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^3$, welches kombinatorisch isomorph zu C_3 ist, und eine lineare Funktion $\ell(x)$, die $\mathcal{O}$ induziert?

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $\text{Cyc}_4(n)$ das zyklische 4-Polytop mit n Ecken.

i) Geben Sie eine Formel für $f_i(\text{Cyc}_4(n))$ für alle $0 \leq i \leq 3$ an.

Hinweis: Für 4-Polytope P gilt $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) - f_3(P) = 0$.

ii) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}(f(\text{Cyc}_4(5)) + f(\text{Cyc}_4(9)))$ nicht der f -Vektor eines 4-Polytops ist.

(10 Punkte)