

## Diskrete und Konvexe Geometrie

<http://tinygu.de/DKG18>

### 6. Übungsblatt — Abgabe 12. Dezember 2018

- Aufgabe 1.**
- i) Bestimmen Sie die sieben kombinatorischen Typen von allen 3-dimensionalen Polytopen auf 6 Ecken. Hinweis: Es reicht die Graphen anzugeben.
  - ii) Finden Sie Realisierungen (Koordinaten) von allen diesen Polytopen. Senden Sie ein SAGE Notebook mit ihren Koordinaten und den Polytopen an [manecke@math.uni-frankfurt.de](mailto:manecke@math.uni-frankfurt.de).
  - iii) **Bonus:** Adoptieren Sie ein 3-Polytop: <https://www.polytopia.eu/>
- (10+3 Punkte)**

- Aufgabe 2.** Sei  $G$  ein einfacher Graph. Eine *Unterteilung* von  $G$  ist ein Graph, der aus  $G$  durch Einfügen neuer Knoten auf schon bestehenden Kanten entsteht. Zeigen Sie, dass der Graph eines jeden Polytops der Dimension  $d \leq 3$  eine Unterteilung von  $K_d$  enthält.
- (10 Punkte)**

- Aufgabe 3.** Sei  $P$  ein 3-Polytop mit  $f_0$  Ecken und  $f_2$  Facetten.
- i) Zeigen Sie, dass  $\lceil \frac{f_0}{2} \rceil - 1 \leq f_2 - 3$ .
  - ii) Zeigen Sie die Hirsch-Vermutung für 3-Polytope:

$$\text{diam}(G(P)) \leq f_2 - 3.$$

**Hinweis:** Nutzen Sie den Satz von Menger: In einem  $k$ -zusammenhängenden Graphen lassen sich zwischen je zwei nicht benachbarten Knoten mindestens  $k$ -knotendisjunkte Wege finden.

**(10 Punkte)**

- Aufgabe 4.** Sei  $P = \{x \in \mathbb{R}^d : a_i^t x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$  ein  $d$ -Polytop und  $F = \{x \in P : a_i^t x = b_i, i \in I\}$  für  $I \subseteq [m]$  eine nicht-leere Seite von  $P$ .
- i) Zeigen Sie, dass  $T_F P = \{x \in \mathbb{R}^d : a_i^t x \leq 0, i \in I\}$ .
- Sei  $v \in P$  eine Ecke und für  $k \geq 1$  sei  $N_k(v)$  die Menge der Ecken von  $P$ , deren Abstand<sup>1</sup> zu  $v$  in  $G(P)$  genau  $k$  ist. Sei  $C_k := \text{cone}(u - v : u \in N_k(v))$ .
- ii) Zeigen Sie, dass  $C_1 \supseteq C_2$ .
  - iii) Zeigen Sie, dass  $C_k \supseteq C_{k+1}$  für  $k \geq 2$ .

**(10 Punkte)**

- Bonus.** Sei  $P$  ein 3-dimensionales zentralsymmetrisches Polytop, d.h. es gelte  $P = -P$ . Gilt  $\text{diam}(G(P)) = \text{dist}(v, v') \implies v' = -v$ ? Wie ist es in höheren Dimensionen?

**(+10 Punkte)**

<sup>1</sup>Der Abstand zweier Knoten in einem Graphen ist die minimale Anzahl an Kanten auf einem Weg zwischen ihnen.