

Diskrete und Konvexe Geometrie

<http://tinygu.de/DKG18>

5. Übungsblatt — Abgabe 5. Dezember 2018

- Aufgabe 1.** i) Zeigen Sie, dass der Boole'sche Verband $B_n = (2^{[n]}, \subseteq)$ eulersch ist.
 ii) Beschreiben Sie alle graduierten, eulerschen Verbände $\mathcal{P}$ mit einem Maximum $\hat{1}$ und einem Minimum $\hat{0}$, deren maximale Ketten eine Länge von 3 haben. Wann ist $\mathcal{P}$ der Seitenflächenverband eines Polytops?
Hinweis: Folgern Sie zuerst, dass $\mathcal{P}$ atomisch ist und nutzen Sie diese Einsicht um $\mathcal{P} \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ als Graphen zu interpretieren.

(10 Punkte)

- Aufgabe 2.** Seien $r_1 < \dots < r_n$ für $n \geq d + 1$ gegebene reelle Zahlen.
 i) Zeigen Sie, dass für jedes $I \subseteq [n]$ mit $|I| = d$ der affine Raum $\text{aff}(\gamma_d(r_i) : i \in I)$ eine Hyperebene ist.
 ii) Zeigen Sie, dass $\text{conv}(\gamma_d(r_i) : i \in I) \subseteq \text{Cyc}_d(r_1, \dots, r_n)$ genau dann eine Facette bildet, wenn alle Lücken von I gerade oder alle ungerade sind.

(10 Punkte)

- Aufgabe 3.** Sei $(\mathcal{P}, \preceq)$ ein atomischer und koatomischer Verband und sei A die Menge der Atome und C die Menge der Koatome von $\mathcal{P}$. Wir definieren einen bipartiten Graphen $G(\mathcal{P}) = (A \uplus C, E)$, wobei $ac \in E \iff a \preceq c$ für alle $a \in A, c \in C$.
 i) Finden Sie einen Weg $\mathcal{P}$ aus $G(\mathcal{P})$ zu rekonstruieren.
Hinweis: Wann beschreiben zwei Mengen $A_1, A_2 \subseteq A$ das gleiche Element in $\mathcal{P}$?
 ii) Sei $\mathcal{P}'$ ein weiteres solches Poset mit $G(\mathcal{P}') = (A' \uplus C', E')$. Zeigen Sie, dass wenn $G(\mathcal{P})$ und $G(\mathcal{P}')$ isomorph als bipartite Graphen sind¹, dann gilt $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}'$.

(10 Punkte)

- Aufgabe 4.** i) Sei $P := \Delta_2 \oplus \Delta_2$ die freie Summe (siehe Übungsblatt 3) von zwei Dreiecken. Zeigen Sie, dass P ein nachbarschaftliches 4-Polytop ist.
 ii) Ist P kombinatorisch isomorph zu $\text{Cyc}_4(6)$? Begründen Sie ohne Computerhilfe.
 iii) Zeigen Sie, dass jede Eckenfigur (siehe Übungsblatt 4) eines k -nachbarschaftlichen Polytops $(k - 1)$ -nachbarschaftlich ist.

(10 Punkte)

¹Es gibt Bijektionen $f : A \rightarrow A'$ und $g : C \rightarrow C'$ mit $ac \in E$ genau dann, wenn $f(a)g(c) \in E'$.