GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2018/19
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Diskrete und Konvexe Geometrie

http://tinygu.de/DKG18

4. Übungsblatt — Abgabe 28. November 2018

Aufgabe 1. Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \le \mathbf{1}\}$ und $Q = \{y \in \mathbb{R}^e : By \le \mathbf{1}\}$ voll-dimensionale Polytope mit $\mathbf{0}$ im Inneren. Wir definieren den **Join** von P und Q als

$$P * Q \;:=\; \operatorname{conv}\Big((P \times \{\mathbf{0}\} \times \{-1\}) \cup (\{\mathbf{0}\} \times Q \times \{1\})\Big) \;\subseteq\; \mathbb{R}^{d+e+1}.$$

i) Zeigen Sie, dass $\dim P * Q = \dim P + \dim Q + 1$.

ii) Zeigen Sie, dass $P * Q$ die Menge aller $(x, y, t) \in \mathbb{R}^{d+e+1}$ ist mit

$$\begin{pmatrix} 2A & & +\mathbf{1} \\ & 2B & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \;\le\; \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

iii) Zeigen Sie, dass $(P * Q)^\triangle$ linear isomorph zu $P^\triangle * Q^\triangle$ ist.

iv) Zeigen Sie, dass jede Seite F von $P * Q$ linear isomorph zu $F_P * F_Q$ ist, wobei F_P eine Seite von P und F_Q eine Seite von Q ist.

v) Seien P und Q Simplizes. Zeigen Sie, dass $P * Q$ ein Simplex ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Seien $P \subset \mathbb{R}^d$ und $Q \subset \mathbb{R}^e$ Polytope mit $\mathbf{0}$ im Inneren.

i) Zeigen Sie, dass $(P \times Q)^\triangle = P^\triangle \oplus Q^\triangle$. Zur Erinnerung: Die freie Summe wurde auf Blatt 3 eingeführt.

ii) Zeigen Sie, dass jede echte Seite von $P \oplus Q$ linear isomorph zu $F_P * F_Q$ ist, wobei F_P eine Seite von P und F_Q eine Seite von Q ist.

iii) Zeigen Sie, dass $P \times Q$ genau dann einfach ist, wenn P und Q einfach sind. Unter welchen Bedingungen ist $P \times Q$ simplizial? Wann ist $P \oplus Q$ einfach bzw. simplizial?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein voll-dimensionales Polytop mit Eckenmenge $V = V(P)$. Für eine Ecke $v \in V$ sei H eine Hyperebene die v strikt von $P' = \operatorname{conv}(V \setminus v)$ trennt. Die **Eckenfigur**[1] von P bei v ist das Polytop $P/v := P \cap H$.

i) Zeigen Sie, dass es eine inklusionserhaltende Bijektion gibt zwischen den $(k-1)$-Seiten von P/v und den k-Seiten von P die v enthalten.

ii) Zeigen Sie, dass P genau dann einfach ist, wenn jede Ecke zu genau d Kanten inzident ist. [Hinweis: Zeigen Sie, dass ein $(d-1)$-dimensionales Polytop mit d Facetten immer ein Simplex ist.]

iii) Zeigen Sie: Ist P ein einfaches und simpliziales Polytop der Dimension $d \ge 3$ ist, dann ist P ein Simplex.

[1] Warum *die* Eckenfigur? Verschiedene H geben zwar verschiedene P/v aber Aufgabe i) zeigt, dass P/v kombinatorisch eindeutig ist und später werden wir auch sehen, dass P/v projektiv eindeutig ist.

iv) Bonus: Für eine Seite $F \subseteq P$ der Dimension $\dim F \geq 0$ definieren wir eine **Seitenfigur** induktiv wie folgt. Ist $F = \{v\}$, dann setze $P/F := P/v$. Für $\dim F > 0$, setze $P/F := P'/F'$, wobei $v \in V(F)$ eine Ecke und $F' \subseteq P' := P/v$ die zu F korrespondierende Seite ist. Zeigen Sie, das Seiten von P/F wie in i) zu Seiten von P korrespondieren, die F enthalten.

(10 + 3 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph. Für eine Teilmenge $S \subseteq V$, sei $E[S] := E \cap \binom{S}{2}$ die Menge der Kanten aus E, deren Endpunkte in S liegen. Wir betrachten das Polytop

$$\mathcal{F}_G \;:=\; \left\{ x \in \mathbb{R}^E_{\geq 0} : \sum_{e \in E[S]} x_e \leq |S| - 1 \text{ für alle } \varnothing \neq S \subseteq V \right\}.$$

i) Stellen Sie anhand von hinreichend vielen Beispielen eine Vermutung für die Gestalt der Ecken von $\mathcal{F}_G$ auf. Nutzen Sie dafür das bereitgestellte SAGE Notebook und dokumentieren Sie mindestens zwei Beispiele, die für Ihre Vermutung sprechen.

(10 Punkte)

ii) Beweisen Sie Ihre Vermutung.

(10 Punkte)

Aufgabe 5. Sei P ein d-dimensionales Polytop.

i) Zeigen Sie, dass man $d + 1$ Ecken von P auswählen kann, sodass deren Supremum im Seitenverband (also die kleinste, sie alle enthaltende Seite) genau P ist.

ii) Zeigen Sie, dass man $d + 1$ Facetten von P auswählen kann, deren Schnitt leer ist.

iii) Sei $-1 \leq k < h \leq d - 1$. Zeigen Sie, dass für jede k-Seite F von P es immer $h - k + 1$ Seiten der Dimension h gibt, deren Schnitt genau F ist. Hinweis: Beginnen Sie mit dem Fall $h = d - 1$.

(10 Punkte)