GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2018/19
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Diskrete und Konvexe Geometrie

http://tinygu.de/DKG18

3. Übungsblatt — Abgabe 14. November

Aufgabe 1. Sei das folgende Polytop in $\mathbb{R}^4$ gegeben:

$$P := \operatorname{conv}\{\pm e_i \pm e_j : 1 \leq i < j \leq 4\},$$

wobei e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ ist.

i) Zeigen Sie, dass $Q \subseteq P^\triangle$, wobei Q die konvexe Hülle der folgenden 24 Punkte ist:

$$\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3, \pm e_4, \tfrac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$$

ii) Zeigen Sie, dass $P^\triangle = Q$.

iii) *(Bonus)* Zeigen Sie, dass $P^\triangle$ kongruent zu einem skalaren Vielfachen von P ist.

Das Polytop P wird 24-Zell genannt.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $\operatorname{rec}(K)$ der zugehörige Rezessionskegel.

i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rec}(K)$ ein konvexer Kegel ist und $K + \operatorname{rec}(K) \subseteq K$.

ii) Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\}$. Zeigen Sie, dass falls $Q \neq \varnothing$, dann $\operatorname{rec}(Q) = \{x : Ax \leq 0\}$. Warum ist das für $Q = \varnothing$ falsch?

iii) Sei $Q = P + C$ ein nicht leeres Polyeder mit P Polytop und C Kegel. Dann ist $\operatorname{rec}(Q) = C$.

iv) Zeigen Sie, dass $Q = \operatorname{conv}(V(Q)) + \operatorname{rec}(Q)$ für spitze Polyeder Q.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $C = \operatorname{cone}(u_1, \dots, u_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein konvexer Kegel.

i) Zeigen Sie, dass C genau dann spitz ist, wenn $\{0\}$ eine exponierte Seite von C ist, d.h., dass es eine Stützhyperebene H von C gibt, mit $H \cap C = \{0\}$.

ii) Zeigen Sie, dass $(H + p) \cap C$ ein Polytop ist für jeden Punkt $p \in C$.

iii) Es gelte für je zwei $i \neq j$, dass $u_i \neq \lambda u_j$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es dann eine eindeutige minimale Teilmenge $U \subseteq \{u_1, \dots, u_n\}$ gibt, so dass $C = \operatorname{cone}(U)$.

iv) Zu einem voll-dimensionales Polyeder $Q \subset \mathbb{R}^d$ definieren wir die **Homogenisierung**

$$\operatorname{hom}(Q) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{d+1} : t \geq 0, x \in t \cdot Q\}$$

Zeigen Sie, dass

$$Q^\triangle = \{y \in \mathbb{R}^d : (y, -1) \in \operatorname{hom}(Q)^\vee\}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ und $Q \subset \mathbb{R}^e$ zwei volldimensionale Polytope mit dem Ursprung im Inneren. Die **freie Summe** von P und Q ist das Polytop $P \oplus Q$ definiert durch

$$P \oplus Q := \operatorname{conv}\left(\{(p,0) : p \in P\} \cup \{(0,q) : q \in Q\}\right) \subset \mathbb{R}^{d+e}.$$

i) Zeigen Sie, dass das d-Kreuzpolytop $C_d^{\triangle}$ eine freie Summe von d Segmenten ist.

ii) Es seien $F \subset P$ und $G \subset Q$ echte (aber möglicherweise leere) Seiten. Zeigen Sie, dass

$$V_{F,G} := \{(p,0) : p \in V(P) \cap F\} \cup \{(q,0) : q \in V(Q) \cap G\}$$

die Menge der Ecken einer echten Seite von $P \oplus Q$ ist.
Hinweis: Ist $0 \in \operatorname{relint} P$, dann kann man für jede Stützhyperebene H von P die Form $H = \{x \in \mathbb{R}^d : c^t x = 1\}$ annehmen.

iii) Zeigen Sie, dass die Eckenmenge einer jeden echten Seite von $P \oplus Q$ von der Form $V_{F,G}$ für zwei echte Seiten $F \subset P$, $G \subset Q$ ist.

(10 Punkte)