Diskrete und Konvexe Geometrie

http://tinygu.de/DKG18

2. Übungsblatt — Abgabe 7. November 2018

Aufgabe 1. Seien $K \subseteq L \subseteq \mathbb{R}^d$ konvexe Mengen mit $k = \dim K = \dim L$.

i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{relint}(K) \subseteq \operatorname{relint}(L)$.

ii) Sei $K = \operatorname{conv}(p_1, \dots, p_n)$ und $p := \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$ eine Konvexkombination mit $\lambda_i > 0$. Zeigen Sie, dass $p \in \operatorname{relint}(K)$.
(Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\operatorname{aff}(p, p_1, \dots, p_k) = \operatorname{aff}(K)$.)

iii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{relint}(K) \neq \varnothing$ für $K \neq \varnothing$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Für ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ und $q \notin \operatorname{aff}(P)$ definieren wir die **Pyramide** über P mit Spitze q als $q * P := \operatorname{conv}(P \cup \{q\})$. Zeigen Sie, dass $q * P$ affin isomorph zu $q' * P$ ist für alle $q, q' \notin \operatorname{aff}(P)$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. i) Zeigen Sie, dass die Minkowskisumme $P + Q$ zweier Polytope P, Q wieder ein Polytop ist.

ii) Es seien $P, Q \subseteq \mathbb{R}^2$ Polygone mit m bzw. n Ecken. Sei $P + Q$ ein Polygon mit N Ecken. Zeigen Sie, dass dann

$$\max\{n, m\} \;\leq\; N \;\leq\; n + m\,.$$

iii) Bonus: Zeigen Sie, dass wenn $P + Q$ ein Polytop ist, dass dann auch P und Q Polytope sind.

(10+3 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Die **Helly-Zahl** von $\mathcal{S}$ ist die kleinste Zahl $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ mit der folgenden Eigenschaft: Jede endliche Teilmenge $S \subseteq \mathcal{S}$ mit $|S| \geq r$, so dass für alle $A \in \binom{S}{r}$ gilt, dass $\bigcap A \neq \varnothing$, hat einen nichtleeren Schnitt $\bigcap S \neq \varnothing$. Existiert keine solche Zahl r, dann ist die Helly-Zahl von $\mathcal{S}$ gleich ∞. Finden Sie für folgende $\mathcal{S}$ die Helly-Zahl:

i) $\mathcal{S}$ ist die Menge der achsenparallelen kompakten Quader des $\mathbb{R}^d$,

ii) $\mathcal{S}$ ist die Menge der k-dim. affinen Unterräume des $\mathbb{R}^d$ (für fixes $k \in [d]$),

iii) $\mathcal{S}$ ist die Menge der Ränder von Bällen in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

(10 Punkte)

Aufgabe 5. Sei $Q \subset \mathbb{R}^{d+1}$ die (möglicherweise leere) Menge der Lösung des folgenden Ungleichungssystems

$$\begin{array}{llll}
a_i^t\mathbf{x} + x_{d+1} & \leq & b_i & \text{für } 1 \leq i \leq k \\
a_j^t\mathbf{x} - x_{d+1} & \leq & b_j & \text{für } k < j \leq l \\
a_h^t\mathbf{x} & \leq & b_h & \text{für } l < h \leq m
\end{array}$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^d$ und $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $\pi : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ die lineare Projektion mit $\pi(\mathbf{x}, x_{d+1}) := \mathbf{x}$.

i) Zeigen Sie, dass $\pi(Q)$ die Menge aller $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ist mit

$$\begin{array}{ccll} (a_i + a_j)^t\mathbf{x} & \leq & b_i + b_j & \text{für } 1 \leq i \leq k < j \leq l \\ a_h^t\mathbf{x} & \leq & b_h & \text{für } l < h \leq m \end{array} .$$

(Hinweis: $\mathbf{x} \in \pi(Q)$ genau dann, wenn $\pi^{-1}(\mathbf{x}) \cap Q \neq \varnothing$.)

ii) Folgern Sie aus i) das Farkas Lemma.

(10 Punkte)

Aufgabe 6. () Im Notebook ist eine Menge S von 20 Vektoren im $\mathbb{R}^8$ gegeben. Finden Sie eine Teilmenge A von S mit kleinstmöglicher Kardinalität, so dass $x \in \operatorname{conv} A$ für

$$x := \left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{24}, \frac{17}{8}, -\frac{31}{28}, -\frac{7}{24}, \frac{1}{24}, -\frac{25}{132}, \frac{845}{1464}\right).$$

(10 Punkte)

Im Übungsverlauf wird es einige Aufgaben geben, die nur mit Sage sinnvoll bearbeitet werden können. Zusammen mit den Sage-Aufgaben wird ein Jupyter-Notebook (Dateiendung `.ipynb`) auf der Webseite veröffentlicht, welches Sie als Grundlage für die Lösung verwenden sollen. Sage-Aufgaben werden mit () gekennzeichnet.

Für die Abgabe der SAGE-Lösung soll ein hinreichend gut kommentierter Code mit der in der Aufgabe geforderten Ausgabe ausgedruckt werden. Machen Sie dafür einen Screenshot ihrer SAGE-Session und fügen Sie ihn Ihren Lösungen auf Papier bei. Eine Einführung in SAGE befindet sich in `https://hds.hebis.de/ubffm/Record/HEB36808454X`.