GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2018/19
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Diskrete und Konvexe Geometrie

http://tinygu.de/DKG18

1. Übungsblatt — 24. Oktober 2018

Aufgabe 1. Eine nicht-leere konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^d$ ist ein **konvexer Kegel**, falls für alle $x \in C$ und $\mu \geq 0$ gilt $\mu x \in C$. Es ist klar, dass der Schnitt von Kegeln wieder ein Kegel ist und wir definieren die **Kegelhülle** cone(X) einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ als

$$\text{cone}(X) \ := \ \bigcap_C C\,,$$

wobei der Schnitt über alle Kegel C geht mit $X \subseteq C$.

i) Finden Sie eine intrinsische Beschreibung für cone(X).

ii) Gilt conv$(X) =$ cone$(X) \cap$ aff(X)?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $d \geq 2$ und $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$. Der Einheitsball in der ℓ_p-Norm ist die konvexe Menge

$$B_d^p \ := \ \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}.$$

i) Für $p = 2$ ist B_d^2 der gewöhnliche Einheitsball. Zeigen Sie, dass B_d^2 kein Polytop ist.

ii) Für welche $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ ist B_d^p ein Polytop?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Eine **Konvexgeometrie** ist ein Paar (V, τ) wobei V eine endliche Menge ist und $\tau : 2^V \to 2^V$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt: $\tau(\varnothing) = \varnothing$ und für $A \subseteq B \subseteq V$ gilt

- $A \subseteq \tau(A)$,
- $\tau(A) \subseteq \tau(B)$,
- $\tau(\tau(A)) = \tau(A)$
- Ist $y, z \notin \tau(A)$ und $z \in \tau(A \cup y)$, dann ist $y \notin \tau(A \cup z)$.

Die Mengen $\tau(A)$ für $A \subseteq V$ heißen **konvexe Mengen**.

i) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^d$ eine endliche Teilmenge und $\tau(A) :=$ conv$(A) \cap V$. Zeigen Sie, dass (V, τ) eine Konvexgeometrie ist.

ii) Sei T ein Baum und V die Knotenmenge von T. Für $A \subseteq V$ sei $\tau(A)$ die Knotenmenge des minimalen Teilbaumes von T, der A enthält. Zeigen Sie, dass (V, τ) eine Konvexgeometrie ist. Was sind die konvexen Mengen?

Ein Element $x \in A$ heißt **extremal**, falls $\tau(A) \neq \tau(A \setminus \{x\})$. Sei $\mathrm{ex}(A)$ die Menge der extremalen Elemente von A.

iii) Zeigen Sie, dass $\tau(A) = \tau(\mathrm{ex}(A))$ in jeder Konvexgeometrie (V, τ) und für alle $A \subseteq V$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **pfad-zusammenhängend** falls es für jede Wahl von $p_0, p_1 \in X$ eine stetige Funktion $f : [0,1] \to X$ gibt mit $f(0) = p_0$ und $f(1) = p_1$. Beweisen Sie folgende Verschärfung vom Satz von Carathéodory: Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ pfad-zusammenhängend und $p \in \mathrm{conv}(X)$. Dann gibt es $p_1, \ldots, p_d \in X$ mit $p \in \mathrm{conv}(p_1, \ldots, p_d)$.

Bonus: Eine Menge X ist **zusammenhängend** falls X nicht durch zwei nicht leere, disjunkte offene Mengen überdeckt werden kann. Beweisen Sie die obige Aussage für zusammenhängende X.

(10+5 Punkte)