Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

9. Übungsblatt — Abgabe 24. Januar

Aufgabe 1. ■ Sei $G = ([d], E)$ ein Graph und

$$Z_G = \sum_{\substack{i<j \\ ij \in E}} [e_i, e_j]$$

das zugehörige graphische Zonotop.

i) Sei G zusammenhängend und sei $H = \{x \in \mathbb{R}^d : a^t x = b\}$ eine Hyperebene so dass $Z_G \subseteq H$. Zeige, dass H die Hyperebene $\{x : x_1 + \cdots + x_d = 1\}$ ist. (Daraus folgt dann, dass $\dim Z_G = d - 1$ ist.)

Eine Orientierung von G lässt sich kodieren durch eine Menge $\sigma \subseteq E$. Die Orientierung einer Kante $ij \in E$ mit $i < j$ ist $j \to i$ falls $ij \in \sigma$ und $i \to j$ sonst[1].

ii) Zeige, dass wenn $\sigma \subseteq E$ eine azyklische Orientierung ist, dann gibt es Zahlen $l_1, \ldots, l_d \in \mathbb{R}$ so dass für $ij \in E$ mit $i < j$ gilt:

$$ij \in \sigma \quad \Longleftrightarrow \quad l_i > l_j.$$

iii) Zeige, dass σ eine azyklische Orientierung ist genau dann, wenn

$$\sum_{\substack{i<j \\ ij \in E \setminus \sigma}} e_j + \sum_{\substack{i<j \\ ij \in \sigma}} e_i$$

eine Ecke von Z_G ist.

Aufgabe 2. ■ Sei $Z = [0, a_1] + \cdots + [0, a_m] \subset \mathbb{R}^d$ ein voll-dimensionales Zonotop.

$$S \ := \ \{p \in Z : p + \varepsilon e_d \notin Z \text{ für alle } \varepsilon > 0\}$$

mit $e_d = (0, \ldots, 0, 1)$.

i) Sei $q \in Z + [0, e_d]$. Zeige, dass entweder $q \in Z$ oder $p = p + \lambda e_d$ für ein $p \in S$ und $0 < \lambda \leq 1$. (Daraus folgt, dass $\mathrm{vol}(Z + [0, e_d]) = \mathrm{vol}(Z) + \mathrm{vol}(S + [0, e_d])$.)

ii) Sei $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ die orthgonale Projektion $\pi(x', x_d) = (x', 0)$. Zeige, dass π eine Bijektion zwischen S und $\pi(S)$ ist. (Mit etwas mehr Arbeit folgt daraus, dass $\mathrm{vol}_d(S + [0, e_d]) = \mathrm{vol}_{d-1}(\pi(S))$.)

iii) Optional: Sei $Z' = Z + [0, a]$ für ein beliebiges $a \neq 0$. Sei Z'' die orthogonale Projektion von Z auf auf $a^\perp = \{x : a^t x = 0\}$. Zeige, dass

$$\mathrm{vol}_d(Z') \ = \ \mathrm{vol}_d(Z) + \|a\| \cdot \mathrm{vol}_{d-1}(Z'').$$

[1] Anders ausgedrückt: Kanten sind standardmäßig von *kleinen* Index zu *großem* Index orientiert und σ merkt sich die Ausnahmen.