Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

8. Übungsblatt — Abgabe 17. Januar

Aufgabe 1. ■ Für $d \geq 1$, sei $G \subset \mathbb{C}^{d\times d}$ eine endliche Matrixgruppe, also eine endliche Menge von Matrizen mit $A \cdot B \in G$ und $A^{-1} \in G$ für $A, B \in G$. Der *invariante Unterraum* ist definiert als $(\mathbb{C}^d)^G \ := \ \{x \in \mathbb{C}^d : Ax = x \text{ für alle } A \in G\}$. Sei ferner

$$R \ := \ \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} A.$$

i) Zeige, dass $Rx \in (\mathbb{C}^d)^G$ und $R(Rx) = Rx$.

ii) Zeige, dass $\dim(\mathbb{C}^d)^G \ = \ \mathrm{tr}(R)$.

Aufgabe 2. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $T : V \to V$ eine lineare Transformation. Zeige, dass für die induzierte Transformation $T^{\otimes n} : V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$ folgendes gilt

$$\mathrm{tr}(T^{\otimes n}) \ = \ \mathrm{tr}(T)^n.$$

Aufgabe 3. ■ Sei $V = \mathbb{C}^2$ mit Basis $\{s, w\}$ und $V^{\otimes n}$ der Vektorraum aller Halsketten der Länge n. Für fixes $q \in \mathbb{C}$, sei $S_q : V \to V$ die lineare Transformation mit $S(w) = w$ und $S_q(s) = qs$. Zeige, dass $S_q^{\otimes n}$ den invarianten Raum $(V^{\otimes n})^G$ in sich selbst abbildet und das

$$\mathrm{tr}\left(S_q^{\otimes n} : (V^{\otimes n})^G \to (V^{\otimes n})^G\right) \ = \ c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots + c_n q^n,$$

wobei c_k die Anzahl der Halsketten mit k schwarzen Perlen bis auf Symmetrie ist.