Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

7. Übungsblatt — Abgabe 10. Januar

Frohe Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Aufgabe 1. ■ Für $0 \leq k < d$, sei $\langle \binom{d}{k} \rangle$ die Anzahl Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_d$ mit $\text{des}(\tau) = k$.
Zeige, dass $\langle \binom{d}{0} \rangle = \langle \binom{d}{d-1} \rangle = 1$ und

$$\langle \binom{d}{k} \rangle = (k+1) \langle \binom{d-1}{k} \rangle + (d-k) \langle \binom{d-1}{k-1} \rangle$$

für $0 < k < d-1$.

[Tipp: Es ist einfacher die Aussage für Permutationen mit $d-1-k$ Aufstiegen (ascents) zu zeigen. Betrachte dafür eine Permutation als ein Wort $\tau = \tau(1)\tau(2)\dots\tau(d)$. Wenn man aus dem Wort das Symbol d löscht, dann bekommt man eine Permutation von $\{1, \dots, d-1\}$.]

Aufgabe 2. ■ Für $0 < k < d$, sei

$$\Delta(d, k) = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, d \text{ und } x_1 + \dots + x_d = k\}$$

der (d, k) -Hypersimplex. Für eine Teilmenge $I \subseteq [d]$, sei $e_I \in \{0, 1\}^d$ der Punkt mit $(e_I)_j = 1$ falls $j \in I$ und $= 0$ sonst.

i) Zeige, dass $\Delta(d, k) = \text{conv}(e_I : I \subseteq [d], |I| = k)$. Also für einen beliebigen Punkt $q \in \Delta(d, k)$ zeige, dass es $I_1, \dots, I_m \in \binom{[d]}{k}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ gibt mit $q = \lambda_1 e_{I_1} + \dots + \lambda_m e_{I_m}$ und $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

ii) Bestimme die Koordinaten des Baryzenters

$$c := \frac{1}{\binom{d}{k}} \sum_{I \in \binom{[d]}{k}} e_I.$$

iii) Berechnen Sie das normalisierte Volumen von $\Delta(d+1, k+1)$ mit der Zerlegung aus der Vorlesung bezüglich des Baryzenters c .

Aufgabe 3. i) Welche Polygone lassen sich als 2-dimensionales *alcoved* Polytop realisieren? Also für welche $n \geq 3$ gibt es ein *alcoved* n -Eck?
ii) Optional: Konstruiere mit SAGE 3-dimensionale *alcoved* Polytope mit (a) vielen Ecken und (b) vielen Flächen (2-dimensionalen Seiten).