

Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

6. Übungsblatt — Abgabe 20. Dezember

Übungsblätter sollen in **ZWEIERGRUPPEN** bearbeitet und Dienstags **vor Beginn** der Vorlesung abgegeben werden.

Aufgabe 1. ■ Sei $\tilde{S}(n, k)$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f : [n] \rightarrow [k]$. Benutze das Inklusion-Exklusion Prinzip um zu zeigen, dass

$$\tilde{S}(n, k) = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r (k-r)^n.$$

Aufgabe 2. ■ Sei $(\Pi, \preceq)$ eine endliche Halbordnung. Definiere $\eta \in I(\Pi)$ durch $\eta(a, b) := 1$ falls $a \prec b$ und $:= 0$ sonst. Eine Kette der Länge k ist eine Folge von Elementen $a_0 \prec a_1 \prec \dots \prec a_k$.

i) Zeige, dass $\eta^k(a, b)$ genau die Anzahl der Ketten der Länge k mit Endpunkten $a_0 = a$ und $a_k = b$. Folgere, dass $\eta^k(a, b) = 0$ für alle $a, b \in \Pi$ und $k > |\Pi|$.

ii) Sei $\zeta \in I(\Pi)$ die Zetafunktion von Π . Gib eine Interpretation von $(2\delta - \zeta)^{-1}(a, b)$ für $a, b \in \Pi$.

Aufgabe 3. ■ Seien $(\Pi_1, \preceq_1)$ und $(\Pi_2, \preceq_2)$ zwei Halbordnungen. Wir definieren das (direkte) Produkt von Π_1 und Π_2 als die Halbordnung $\prec$ auf $\Pi_1 \times \Pi_2$ mit

$$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \iff (a_1) \preceq_1 (b_1) \text{ und } (a_2) \preceq_2 (b_2).$$

i) Beweise, dass

$$\mu_{\Pi_1 \times \Pi_2}((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \mu_{\Pi_1}(a_1, b_1) \cdot \mu_{\Pi_2}(a_2, b_2).$$

ii) Zeige, dass $B_n = (2^{[n]}, \subseteq)$ isomorph¹ zu dem n -fachen Produkt der Kette $[2]$ ist.

iii) Folgere, dass $\mu_{B_n}(A, B) = (-1)^{|B \setminus A|}$ für $A \subseteq B \subseteq [n]$.

Aufgabe 4. i) Bestimme die Möbiusfunktion $\mu_{[n]}$ der n -Kette $[n]$ für alle $n \geq 2$.

ii) Sei $\mathcal{D}'_n$ die Halbordnung auf $\{1, \dots, n\}$ gegeben durch $a \preceq b$ falls b durch a geteilt wird. Zeige, dass $\mathcal{D}'_n$ isomorph² zu einem Produkt von Ketten ist. [Tipp: Jede Zahl hat eine Faktorisierung in Primzahlen.]

iii) In der Zahlentheorie ist die Möbiusfunktion μ definiert durch $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ falls n durch das Quadrat einer Primzahl geteilt wird und $\mu(n) = (-1)^r$, falls n das Produkt von r verschiedenen Primzahlen ist. Zeige, dass $\mu(n) = \mu_{\mathcal{D}'_n}(1, n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

¹Zwei Posets Π_1, Π_2 sind isomorph, wenn es eine Bijektion $f : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ gibt, so dass $a \preceq_1 b$ genau dann, wenn $f(a) \preceq_2 f(b)$ gilt.

²Siehe andere Fussnote. :)