

Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

4. Übungsblatt — Abgabe 29. November

Übungsblätter sollen in **ZWEIERGRUPPEN** bearbeitet und Dienstags **vor Beginn** der Vorlesung abgegeben werden.

Aufgabe 1. ■ Für ein Poset Π ist $e(\Pi)$ die Anzahl der linearer Erweiterungen von Π .

- i) Sei $\mathcal{D}_5$ das Poset mit Grundmenge $\{0, 1, \dots, 5\}$ und $a \preceq b$ genau dann wenn " a teilt b ". Bestimme $e(\mathcal{D}_5)$.
- ii) Seien $(\Pi_1, \preceq_1), (\Pi_2, \preceq_2)$ zwei Posets mit disjunkter Grundmenge. Dann ist $(\Pi_1 \cup \Pi_2, \preceq_1 \cup \preceq_2)$ ein Poset. Bestimme $e(\Pi_1 \cup \Pi_2)$ in Abhängigkeit von $e(\Pi_1)$ und $e(\Pi_2)$.

Aufgabe 2. ■ Für eine ungerade Zahl n definiere die *doppelte Fakultät* $n!! := n(n-2)(n-4) \cdots 3 \cdot 1$.

- i) Sei C_n das Poset mit Grundmenge $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ und $a_i \prec a_j$ sowie $b_i \prec a_i$ für alle $1 \leq i < j \leq n$, das *Kamm-Poset*. Zeige, dass die Anzahl der linearen Erweiterungen $e(C_n)$ genau $(2n-1)!!$ ist.
- ii) Eine *Stirling-Permutation* ist eine Sequenz $(w_1, w_2, \dots, w_{2n}) \in \{1, 2, \dots, n\}^{2n}$ so dass jedes $i \in [n]$ genau zweimal vorkommt und zwischen den beiden Kopien von i nur größere Zahlen auftreten. Beispiel für $n = 2$: 1122, 1221, 2211. Zeige, dass die Anzahl Stirling-Permutationen genau $(2n-1)!!$ ist. [Tipp: Wie liegen die beiden Kopien von n zueinander?]
- iii) Optional: Finde eine Bijektion zwischen Stirling-Permutationen und linearen Erweiterungen von

Aufgabe 3. Sei K_n das Poset aus Aufgabe 2i) mit den zusätzlichen Relationen $b_i \prec b_j$ für $1 \leq i < j \leq n$. Zeige, dass

$$e(K_{n+1}) = \sum_{i=0}^n e(K_i) e(K_{n-i}),$$

wobei $e(K_0) = 1$.

Aufgabe 4. Für $r, s \geq 1$, sei

$$P_{r,s} := \Delta_r \times \Delta_s = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{r+s} : \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r \leq 1 \\ 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_s \leq 1 \end{array} \right\}$$

das Polytop vom letzten Übungsblatt. Finde Koeffizienten $a_i^{r,s}$ so dass

$$\binom{n+r}{r} \binom{n+s}{s} = E_{P_{r,s}}(n) = \sum_{i=0}^{r+s} a_i^{r,s} \binom{n+r+s-i}{r+s}.$$