GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2016/17
Prof. Dr. Raman Sanyal

Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

3. Übungsblatt — Abgabe 22. November (**zwei Wochen Bearbeitungszeit**)

Übungsblätter sollen in **ZWEIERGRUPPEN** bearbeitet und Dienstags **vor Beginn** der Vorlesung abgegeben werden.

Aufgabe 1. ■

i) Finde eine invertierbare lineare Transformation, die das Polytop

$$T_d \;=\; \{x \in \mathbb{R}^d : x_1, \dots, x_d \geq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_d \leq 1\}$$

auf $\triangle_d$ abbildet und schliesse daraus, dass $\mathrm{Vol}(T_d) = 1$.

ii) Sei $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_d|$ die 1-Norm auf $\mathbb{R}^d$. Zeige, dass

$$O_d \;=\; \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_1 \leq 1\}$$

ein Polytop ist. [Tipp: Was ist $\|x\|_1$ wenn die Vorzeichen der Koordinaten schon bekannt sind.]

iii) Was ist das normalisierte Volumen von O_d?

Aufgabe 2. ■ Für $r, s \geq 1$, sei

$$P_{r,s} \;:=\; \triangle_r \times \triangle_s \;=\; \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^{r+s} : \begin{array}{c} 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_r \leq 1 \\ 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_s \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Das ist ein Polytop der Dimension $r + s$. Zeige, dass $P_{r,s}$ sich in $\binom{r+s}{r}$ kongruente Kopien von $\triangle_{r+s}$ zerlegen lässt (und somit das normalisierte Volumen $\binom{r+s}{r}$ hat).

Aufgabe 3. Sei R_d das $2d$-dimensionale Polytop gegeben durch alle $(x,y) \in \mathbb{R}^{2d}$ mit

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & x_1 & \leq & x_2 & \leq & \cdots & \leq & x_d & \leq & 1 \\ & & \vee| & & \vee| & & \cdots & & \vee| & & \\ 0 & \leq & y_1 & \leq & y_2 & \leq & \cdots & \leq & y_d & & \end{array}$$

Finde eine kombinatorische Interpretation des normalisierten Volumens von R_d. [Tipp: Mit SAGE[1] lässt sich sehr einfach das Volumen für R_d für *kleine* d ausrechnen und mit den Zahlen kann man es Mal bei `http://www.oeis.org` probieren.]

Aufgabe 4. Seien T_d und O_d die Polytope aus Aufgabe 1. Finde explizite Formeln für $E_{T_d}(n)$ und $E_{O_d}(n)$.

[1] Polytope in SAGE: `http://doc.sagemath.org/html/en/thematic_tutorials/polytutorial.html` Volumen des eines Polytops P in SAGE mit `P.volume()`.