GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2016/17
Prof. Dr. Raman Sanyal

# Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

10. Übungsblatt — Abgabe 31. Januar

**Aufgabe 1.** ■ Sei $(P, \preceq)$ ein Poset. Die *Breite* von $P$ ist die maximale Kardinalität einer Antikette. Zeige, dass wenn $k$ die Breite von $P$ ist, dann gibt es Ketten $C_1, C_2, \dots, C_k \subseteq P$ so dass

$$P = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k \quad \text{und} \quad C_i \cap C_j = \emptyset \text{ für alle } i \neq j.$$

[Tipp: Formuliere die Aussage für den *Unvergleichbarkeitsgraphen* $\overline{G}(P)$ und nutze die Tatsache, dass auch er perfekt ist.]

**Aufgabe 2.** Ein Graph $G = ([d], E)$ ist ein *Intervalgraph* wenn es für $j = 1, \dots, d$ Segmente $I_j = [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$uv \in E \quad \text{genau dann, wenn} \quad I_u \cap I_v \neq \emptyset.$$

i) Zeige, dass jeder Unvergleichbarkeitsgraph (siehe Aufgabe 1) ein Intervalgraph ist.

ii) Zeige, dass in einem Intervalgraph jeder induzierte Kreis ein Dreieck ist.

**Aufgabe 3.** ■ Für ein Poset $(P, \preceq)$ seien $\mathcal{O} = \mathcal{O}(P)$ und $\mathcal{C} = \mathcal{C}(P)$ das Order- und das Chain-Polytop und sei $\Phi : \mathcal{O} \to \mathcal{C}$ die Abbildung aus der Vorlesung. Für eine Menge $S \subseteq P$ sei $\mathbf{1}_S \in \{0,1\}^P$ der charakteristische Vektor.

i) Sei $J \subseteq P$ ein Filter. Zeige, dass $\Phi(\mathbf{1}_J) = \mathbf{1}_{\min(J)}$.

Definiere $\Psi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^P$ durch

$$(\Psi g)(b) \;:=\; \max\{g(a_1) + g(a_2) + \cdots + g(a_k) : a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_k = b\}$$

für $g \in \mathcal{C}$ und $b \in P$.

ii) Zeige, dass $\Psi(g) \in \mathcal{O}$ für alle $g \in \mathcal{C}$.

iii) Für eine Antikette $A \subseteq \mathcal{C}$ bezeichne mit $\langle A \rangle$ den von ihr erzeugten Filter. Zeige, dass $\Psi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{\langle A \rangle}$.

iv) Optional: Zeige, dass $\Psi \circ \Phi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ und $\Phi \circ \Psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ die Identität sind.

**Aufgabe 4.** Sei $P = \{a_1, \dots, a_d\}$ ein Poset mit $a_i \prec a_j \Rightarrow i < j$. Die Jordan-Hölder Menge $JH(P)$ ist dann die Menge aller Permutationen $\tau \in \mathfrak{S}_d$ mit

$$a_i \prec a_j \quad \Longrightarrow \quad \tau(i) < \tau(j)$$

Zeige, dass $\Phi$ eingeschränkt auf $\Delta_\tau$ eine lineare Abbildung mit Determinante 1 ist.