WiSe 2016/17
Prof. Dr. Raman Sanyal

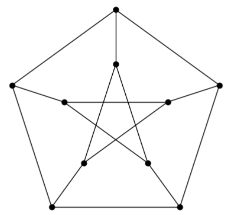
Geometrische und algebraische Methoden in der Kombinatorik

1. Übungsblatt — Abgabe 25. Oktober

Übungsblätter sollen in **Zweiergruppen** bearbeitet und Dienstags **vor Beginn** der Vorlesung abgegeben werden. Jede Aufgabe wird binär mit 'richtig' oder 'falsch' bewertet. Das Übungsblatt gilt als bestanden, wenn Sie mindestens **zwei** Aufgaben richtig gelöst haben. Die mit ■ markierten Aufgaben dienen zur Vertiefung des Stoffs und können auch als Frage in der Prüfung auftreten.

Aufgabe 1. ■

i) Berechnen Sie $w_G(n)$ für den Graph



.

[Tipp: Ausser Google etc. dürfen Sie alles benutzen.]
Optional: Können Sie einen Grund finden warum die Eigenwerte in Paaren $+\lambda, -\lambda$ auftreten?

ii) Geben Sie einen kombinatorischen Beweis, dass

$$w_{K_n}(\ell) \;=\; (n-1)^\ell + (n-1)(-1)^\ell.$$

[Tipp: Welche Sequenzen von Knoten geben geschlossene Kantenzüge?]

Aufgabe 2. ■ Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $n \geq 1$, sei $G^{(n)} = (V^{(n)}, E^{(n)})$ der Graph mit Knoten $V^{(n)} = V \times \{1, 2, \dots, n\}$. Für zwei Knoten (u, i) und (v, j) gilt $(u, i)(v, j) \in E^{(n)}$ genau dann wenn $uv \in E$ ~~oder wenn $u = v$~~ und $i \neq j$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A(G^{(n)})$ in Abhängigkeit von den Eigenwerten von $A(G)$.

Aufgabe 3. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Definiere $G' = (V', E')$ mit Knotenmenge $V' = V \times \{1, 2\}$. Für $(u, i), (v, j) \in V'$ gilt $(u, i)(v, j) \in E'$ genau dann wenn

$$i = j = 1 \text{ und } uv \in E \quad \text{oder} \quad i \neq j \text{ und } u = v.$$

Zeige, dass die Eigenwerte von $A(G')$ genau $\frac{1}{2}(\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2 + 4})$ für $i = 1, \dots, n$ sind.

Aufgabe 4. Ein einfacher Graph $G = (V, E)$ heisst *stark regulär* vom Typ (n, k, a, c) wenn $|V| = n$ und für je zwei Knoten $u, v \in V$, $u \neq v$ gilt

(a) wenn $uv \in E$, dann haben u und v genau a gemeinsame Nachbarn;
(b) wenn $uv \notin E$, dann haben u und v genau c gemeinsame Nachbarn.

Zum Beispiel der Kreis auf 5 Ecken ist stark regulär mit $(5, 2, 0, 1)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A(G)$ in Abhängigkeit von (n, k, a, c).
[Tipp: Sie können mich gerne nach einem Tipp fragen.]