

Algebraische und geometrische Kombinatorik

<https://tinygu.de/AGK25>

7. Übungsblatt — Abgabe 17. Juni 2025

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. Sei (L, \preceq) ein oberer semimodularer Verband. Zeige, dass L relativ komplementiert ist genau dann, wenn L atomisch ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Seien $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Ein Gitterpfad von $(0, 0)$ nach (m, n) ist eine Sequenz von $m + n$ Schritten von denen m Nordschritte und n Ostschritte sind. Die Menge $\mathcal{L}_{m,n}$ aller Gitterpfade ist partiell geordnet mit $W \preceq W'$, falls W schwach unterhalb von W' liegt.

i) Wir identifizieren W mit den Positionen der Nordschritte, also $W = \{w_1 < w_2 < \dots < w_m\} \subseteq [m + n]$, wobei $w_i = k$ sagt, dass der k -te Schritt ein Nordschritt ist. Zeige, dass $W \preceq W'$ genau dann, wenn $w'_i \leq w_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ gilt.

ii) Zeige, dass $\mathcal{L}_{m,n}$ ein Verband ist.

iii) Seien $L \preceq U$ zwei Gitterpfade. Zeige, dass das Intervall $[U, L]_{\mathcal{L}_{m,n}}$, gesehen als eine Teilmenge von $2^{[m+n]}$ die Basen von einem Matroid sind.

(10 Punkte)