

Algebraische und geometrische Kombinatorik

<https://tinygu.de/AGK25>

6. Übungsblatt — Abgabe 10. Juni 2025

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. Sei $(A, +, \cdot)$ eine kommutative $\mathbb{C}$ -algebra mit 1 und $\dim_{\mathbb{C}} A = n < \infty$. Ein Element $e \in A$ ist **idempotent** falls $e^2 = e$. Idempotente e, f sind **orthogonal** falls $ef = 0$. Sei $P \subseteq A$ die Menge der Idempotenten.

i) Zeige, dass mit $e \preceq f$ falls $e = ef$ die Menge P eine partielle Ordnung bekommt.

ii) Zeige, dass $(P, \preceq)$ mit

$$e \wedge f := ef \quad \text{und} \quad e \vee f := 1 - (1 - e)(1 - f)$$

ein Verband ist.

iii) $a \in P$ heißt **primitiv** falls es keine zwei orthogonalen Idempotenten e, f gibt mit $a = e + f$. Zeige, dass die Atome von P genau die primitiven Idempotenten sind.

iv) Zeige, dass $(P, \preceq)$ isomorph zur Booleschen Algebra $B_n = (2^{[n]}, \subseteq)$ ist. (Man kann annehmen, dass es nur n primitive Idempotenten gibt.)

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $(L, \preceq)$ ein endlicher semimodularer Verband. Zeige, dass L relativ komplementiert ist genau dann, wenn L atomisch ist.

(10 Punkte)