Algebraische und geometrische Kombinatorik

`https://tinygu.de/AGK25`

4. Übungsblatt — Abgabe 27. Mai 2025

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. i) Seien $f, F : 2^{[n]} \to \mathbb{C}$ mit $F(J) = \sum_{I \subseteq J} f(I)$. Definiere das Polynom $P_F(x_1, \dots, x_n)$ durch

$$P_F(x_1, \dots, x_n) \;=\; \sum_{S \subseteq [n]} F(S) \mathbf{x}^{\bar{S}}$$

wobei $\mathbf{x}^S := \prod_{i \in S} x_i$ und $\overline{S} = [n] \setminus S$. Wir definieren P_f entsprechend. Zeigen Sie, dass $P_f(x_1, \dots, x_n) = P_F(x_1 - 1, \dots, x_n - 1)$.

ii) Seien P, P_1, P_2 endliche Posets mit $P = P_1 \times P_2$, und $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in P$. Zeigen Sie, dass

$$\mu_P((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \mu_{P_1}(a_1, b_1) \mu_{P_2}(a_2, b_2).$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Seien S, E endliche Mengen und $A_e \subseteq S$ für alle $e \in E$. Sei $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_e : e \in E)$ die Menge aller Schnitte $\bigcap_{e \in I} A_e$ für $I \subseteq E$, partiell geordnet durch *umgekehrte* Inklusion. Zeige, dass $(\mathcal{L}, \preceq)$ ein Verband ist.

(10 Punkte)