

Algebraische und geometrische Kombinatorik

<https://tinygu.de/AGK22>

11. Übungsblatt — Abgabe 28. Juni 2022

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. Sei Δ ein 1-dimensionaler Simplicialkomplex, also ein Graph. Sei $n > 0$ die Anzahl der Knoten, m die Anzahl der Kanten und c die Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{H}_k(\Delta, \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}^{c-1} & \text{für } k = 0 \\ \mathbb{Q}^{m-n+c} & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. i) Sei $\Delta \subseteq 2^V$ ein Simplicialkomplex und $a \notin V$. Definiere den Kegel

$$a * \Delta := \Delta \cup \{a \cup \sigma : \sigma \in \Delta\}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{H}_k(\Delta; A) = 0$ für alle k .

ii) Sei $\Delta = 2^{[n+1]} \setminus \{[n+1]\}$. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{H}_k(\Delta, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq n-1 \\ \mathbb{Z} & \text{für } k = n-1 \end{cases}$$

(10 Punkte)