

Algebraische und geometrische Kombinatorik

<https://tinygu.de/AGK22>

7. Übungsblatt — Abgabe 31. Mai 2022

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein Gitterpfad von $(0, 0)$ nach (m, n) ist eine Folge von $m + n$ Schritten, wobei m davon Nordschritte und n Westschritte sind. Alternativ kann man den Gitterpfad auch als Teilmenge $S \subseteq [m + n]$ mit $|S| = m$ betrachten, die die Positionen enthält, an denen der Pfad einen Nordschritt macht.

i) Für zwei Gitterpfade W, W' seien die korrespondierenden Teilmengen $S, S' \subseteq [m + n]$ gegeben. Was müssen S, S' erfüllen, wenn W immer schwach unterhalb von W' bleibt?

ii) Seien zwei Gitterpfade U, L gegeben, sodass L unterhalb von U ist. Zeigen Sie, dass die Mengen der Nordschritte aller Pfade, die schwach oberhalb von U und schwach unterhalb von L sind die Basen eines Matroids sind.

Hinweis: Können Sie diese Mengen mit Transversalen identifizieren?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Wir nennen zwei Matroide $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ und $M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ **isomorph**, wenn es eine Bijektion $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ gibt, sodass $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq E_1$ genau dann unabhängig ist, wenn $\{\phi(i_1), \dots, \phi(i_k)\} \subseteq E_2$ unabhängig ist. Sei $G = ([n], E)$ ein einfacher Graph und $A(G)$ die Matrix mit Spalten $e_i - e_j$ für $ij \in E$ mit $i < j$. Zeigen Sie, dass der Vektor-Matroid von $A(G)$ isomorph zum graphischen Matroid von G ist.

(10 Punkte)