Algebraische und geometrische Kombinatorik

<https://tinygu.de/AGK22>

4. Übungsblatt — Abgabe 10. Mai 2022

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. i) Seien $f, F : 2^{[n]} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F(J) = \sum_{I \subseteq J} f(I)$. Definiere das Polynom $P_F(x_1, \dots, x_n)$ durch

$$P_F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{S \subseteq [n]} F(S) \mathbf{x}^{\bar{S}}$$

wobei $\mathbf{x}^S := \prod_{i \in S} x_i$ und $\bar{S} = [n] \setminus S$. Wir definieren P_f entsprechend. Zeigen Sie, dass $P_f(x_1, \dots, x_n) = P_f(x_1 - 1, \dots, x_n - 1)$.

ii) Seien P, P_1, P_2 endliche Posets mit $P = P_1 \times P_2$, und $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in P$. Zeigen Sie, dass

$$\mu_P((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \mu_{P_1}(a_1, b_1) \mu_{P_2}(a_2, b_2).$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei P endliches Poset mit n Elementen. Eine **lineare Erweiterung** ist eine Bijektion $\ell : P \rightarrow [n]$ mit

$$a \preceq_P b \implies \ell(a) < \ell(b)$$

für alle $a, b \in P$.

i) Zeigen Sie, dass für $a, b \in P$ genau dann $a \prec_P b$ gilt, wenn für alle linearen Erweiterungen ℓ gilt, dass $\ell(a) < \ell(b)$.

ii) Zeigen Sie, dass die maximalen Ketten in $\mathcal{J}(P)$ in Bijektion zu den linearen Erweiterungen von P sind.

(10 Punkte)