SoSe 2022
Prof. Dr. Raman Sanyal
Aenne Benjes
benjes@math.uni-frankfurt.de

Algebraische und geometrische Kombinatorik

`https://tinygu.de/AGK22`

3. Übungsblatt — Abgabe 3. Mai 2022

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. Sei P ein Poset. Ein **Filter** ist eine Menge $F \subseteq P$ sodass $a \in F$ und $a \preceq b$ impliziert $b \in F$.

i) Sei L ein distributiver Verband und L^{mi} das induzierte Unterposet der meet-irreduziblen Elemente. Zeigen Sie, dass L anti-isomorph[1] zum Ring der Mengen der Filter von L^{mi} ist.

ii) Sei P das induzierte Poset der join-irreduziblen Elemente von L. Folgern Sie, dass $|L^{\mathrm{ji}}| = |L^{\mathrm{mi}}|$.

iii) Sei $j \in L$ join-irreduzibel. Zeigen Sie, dass es ein eindeutiges maximales meet-irreduzibles Element $m \in L$ mit $j \not\preceq m$ gibt. Mehr noch, zeigen Sie, dass die Abbildung $L^{\mathrm{ji}} \to L^{\mathrm{mi}}$ mit $j \mapsto m$ injektiv ist. [Hinweis: Sie können annehmen, dass $L = \mathcal{J}(P)$ für ein Poset P und untersuchen Sie das Komplement eines irreduziblen Ideals.]

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $(L, \preceq)$ ein modularer Verband. Zeigen Sie, dass L graduiert ist.

(10 Punkte)

[1] P_1 ist anti-isomorph zu P_2 falls es eine Bijektion $f : P_1 \to P_2$ gibt mit $a \preceq_1 b$ genau dann, wenn $f(a) \succeq_2 f(b)$ gilt.