

Algebraische und geometrische Kombinatorik

<https://tinygu.de/AGK22>

1. Übungsblatt — Abgabe 19. April 2022

Abgabe der Lösungen ist dienstags vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $e = uv$ eine Kante. Wir definieren den Graphen der durch die Kontraktion von e entsteht als den einfachen Graphen $G/e = (V', E')$, wobei $V' = V \setminus v$ und

$$E' = \{xy \in E : x, y \neq v\} \cup \{uv : uv \in E \setminus e, uv \notin E\}^1.$$

- i) Zeigen Sie, dass $\chi_G(t) = \chi_{G \setminus e}(t) - \chi_{G/e}(t)$.
- ii) Berechnen Sie $\chi_G(t)$ für die Fälle, dass G ein Pfad, ein Kreis oder ein Baum auf n Knoten ist.
- iii) Sei G ein einfacher Graph. Zeigen Sie, dass die Vorzeichen der Koeffizienten von $\chi_G(t)$ alternieren.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit mindestens einer Kante.

- i) Interpretieren Sie G als eindimensionalen Simplicialkomplex. Charakterisieren Sie alle Graphen, für die der entsprechende Simplicialkomplex einen nicht-negativen h -Vektor hat.
- ii) Sei G zusammenhängend und sei $\text{Par}(G) = \{P(I) : I \subseteq E\}$ die durch G induzierten ungeordneten Partitionen von V . Wir sagen, dass $P, P' \in \text{Par}(G)$ vergleichbar sind, wenn P' durch P verfeinert oder P verfeinert. Eine Teilmenge $C \subseteq \text{Par}(G)$ ist eine Kette, wenn alle Paare $P, P' \in C$ vergleichbar sind. Die Kette C heisst maximal, wenn es keine Kette C' gibt mit $C \subset C'$. Zeigen Sie, dass jede maximale Kette in $\text{Par}(G)$ die gleiche Anzahl Elemente hat.

(10 Punkte)

¹Falls uv und vw Kanten von G sind, dann soll nur einmal die Kante uv in E' enthalten sein.