GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Aenne Benjes
Sebastian Manecke

Diskrete Konvexgeometrie

http://tinygu.de/DKG19

5. Übungsblatt — Abgabe 2. Juli 2019

Wenn Sie bei einer Aufgabe stecken bleiben, dann fragen Sie uns! Wir lieben es, Hinweise zu geben.

Aufgabe 1. Seien $P_1, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^d$ Polytope mit $n > d$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{\varnothing \neq I \subseteq [n]} (-1)^{n-|I|} V(P_I) \;=\; 0$$

wobei $P_I = \sum_{i \in I} P_i$.

Hinweis: Betrachten Sie eine exakte gemischte Unterteilung von $P_1 + \cdots + P_n$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Der **Totalgrad** eines Polynoms $f(\mathbf{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ist $\deg(f) = \max(|\alpha| : c_\alpha \neq 0)$ wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Seien $f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})$ generische Polynome mit $\deg(f_i) = d_i$ für $i = 1, \dots, n$ und sei

$$\mathcal{V} \;=\; \{\mathbf{x} \in (\mathbb{C}^*)^n : f_1(\mathbf{x}) = \cdots = f_n(\mathbf{x}) = 0\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $|\mathcal{V}| \leq d_1 d_2 \cdots d_n$.

Hinweis: Überlegen Sie sich wie der Totalgrad das Newtonpolytop von f_i einschränkt.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Seien $K, L \subset \mathbb{R}^d$ zwei nicht-leere konvexe Körper. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $V(K+L)^{\frac{1}{d}} \geq V(K)^{\frac{1}{d}} + V(L)^{\frac{1}{d}}$;

ii) $V(sK+tL)^{\frac{1}{d}} \geq sV(K)^{\frac{1}{d}} + tV(L)^{\frac{1}{d}}$ für alle $s, t \geq 0$;

iii) $V((1-\lambda)K + \lambda L) \geq V(K)^{1-\lambda} \cdot V(L)^\lambda$ für alle $0 \leq \lambda \leq 1$;

iv) $V((1-\lambda)K + \lambda L) \geq \min(V(K), V(L))$ für alle $0 \leq \lambda \leq 1$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_d \leq 1\}$. Für $t \in R$ sei $H = \{x : x_1 + \cdots + x_d = t\}$. Bestimmen Sie die Funktion $f : [0, d] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) \;:=\; v(\Delta \cap H_t)^{\frac{1}{d}}\,.$$

Wie immer ist $v(\cdot)$ das Volumen in $H_t \cong \mathbb{R}^{d-1}$.

(10 Punkte)