GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Aenne Benjes
Sebastian Manecke

Diskrete Konvexgeometrie

http://tinygu.de/DKG19

4. Übungsblatt — Abgabe 19. Juni 2019

Wenn Sie bei einer Aufgabe stecken bleiben, dann fragen Sie uns! Wir lieben es, Hinweise zu geben.

Aufgabe 1. Seien $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ Polytope mit $P \cup Q$ konvex.

i) Zeigen Sie, dass für alle $c \in \mathbb{R}^d$ gilt $h_{P\cap Q}(c) = \min\{h_P(c), h_Q(c)\}$.

ii) Zeigen Sie, dass $(P \cup Q) + (P \cap Q) = P + Q$.

iii) Seien $K_1, \ldots, K_{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ konvexe Körper. Zeigen Sie, dass die Abbildung $K \mapsto \mathrm{MV}(K_1, \ldots, K_{d-1}, K)$ eine Bewertung ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. i) Sei $\mathrm{Cay}(P_1, \ldots, P_n) \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ ein $(d+n-1)$-Simplex. Zeigen Sie, dass $P_1 + \cdots + P_n$ exakt ist.

ii) Sei $G = (V, E)$ Graph mit $V = \{0, \ldots, d\}$. Zeigen Sie, dass für $B \subseteq \binom{E}{d}$ gilt $\det(e_{ij} : ij \in B) = \pm 1$ falls B ein aufspannender Baum ist und $= 0$ sonst.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Seien

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x_i \le 1\} && \text{der Würfel} \\ Q &= \mathrm{conv}(\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3) && \text{das Oktaeder und} \\ R &= \mathrm{conv}(0, e_1, e_2, e_3) && \text{ein Simplex} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = V(\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R)$. Es sind alle Hilfsmittel erlaubt (z.B. SAGE aber auch mathematische Hilfsmittel). Wir müssen nur in der Lage sein Ihre (ausgedruckten) Rechnungen nachzuvollziehen.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. i) Zeigen Sie, dass genau dann $\mathrm{MV}(K_1, \ldots, K_d) > 0$, wenn es $a_i, b_i \in K_i$ gibt, so dass die Vektoren $a_1 - b_1, \ldots, a_d - b_d$ linear unabhängig sind.

ii) Seien $K_1, \ldots, K_r$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ mit $\sum_i m_i = d$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{MV}(K_1[m_1], \ldots, K_r[m_r]) = 0$ falls es ein i gibt mit $m_i > \dim K_i$.

iii) Sei Δ ein d-Simplex und P die *Truncation* einer Ecke von Δ. Zeigen Sie, dass $\mathrm{MV}(\Delta[d-i], P[i]) = V(\Delta)$ für $i = 1$.
Bonus: Können Sie es auch für $i > 1$ zeigen?

iv) Sei $u \in \mathbb{R}^d$ mit $\|u\| = 1$ und sei π_u die orthogonale Projektion auf $u^\perp$. Zeigen Sie, dass für jeden konvexen Körper K gilt

$$\mathrm{MV}(K[d-1], [0, u]) = V(\pi_u(K)) .$$

(10 Punkte)