Diskrete Konvexgeometrie

<http://tinygu.de/DKG19>

3. Übungsblatt — Abgabe 5. Juni 2019

Wenn Sie bei einer Aufgabe stecken bleiben, dann fragen Sie uns! Wir lieben es, Hinweise zu geben.

Aufgabe 1. i) Sei P ein d -Polytop mit den Facetten $F_1, F_2, \dots, F_m$. Zeigen Sie, dass

$$v(F_1) < v(F_2) + \dots + v(F_m).$$

ii) Zeigen Sie Minkowskis Theorem in der Ebene: Für die Ebene aufspannende Einheitsvektoren $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$, so dass $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0$, gibt es ein, bis auf Translation, eindeutiges Polygon P mit Facettennormalen u_i und zugehörigen Facettenvolumina α_i .

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Für $0 \leq k \leq n$ ist der **(n,k)-Hypersimplex** das Polytop

$$\Delta(n, k) := \text{conv}(\mathbf{e}_A : A \subseteq [n], |A| = k).$$

Das ist ein $(n-1)$ -dimensionales Polytop für $0 < k < n$.

i) Zeigen Sie, dass für $1 < k < n-1$ die Facetten von $\Delta(n, k)$ gegeben sind durch

$$F_i^a := \{p \in \Delta(n, k) : p_i = a\}$$

für $i = 1, \dots, n$ und $a = 0, 1$.

ii) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Simplizes in einer Pulling Triangulierung unabhängig ist von der Reihenfolge der Ecken.

iii) Sei $t(n, k) = |\text{Pull}(\Delta(n, k))|$. Berechnen Sie die Werte für $0 < k < n \leq 7$ und finden Sie eine kombinatorische Interpretation.

Hinweis: Die Werte lassen sich mit ca. vier Zeilen Code in SAGE ausrechnen und für die kombinatorische Interpretation können Sie oeis.org benutzen.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Für $n, m \geq 0$ sei $P_{m,n} := \Delta_m \times \Delta_n$. Die Ecken von $P_{m,n}$ sind von der Form $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ für $(i, j) \in G := [m+1] \times [n+1]$. Auf G ist eine partielle Ordnung durch $(i, j) \preceq (k, l)$ für alle $i \leq k$ und $j \leq l$ definiert.

i) Zeigen Sie, dass jede nicht-leere Seite $F \subset P_{m,n}$ eine eindeutige minimale Ecke v_F bezüglich $\preceq$ besitzt.

ii) Zeigen Sie, dass die Simplizes einer Pulling Triangulierung bezüglich $\preceq$ genau die Gitterpfade in $\mathbb{Z}^2$ von $(0, 0)$ zu (m, n) mit Schritten $\rightarrow$ und $\uparrow$ sind.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein d -Polytop und $H = \{x : c^t x = \delta\}$ eine Hyperebene, die das Innere von P trifft. Die Hyperebene H heißt **split** falls $P \cap H = \text{conv}(V(P) \cap H)$. In diesem Fall bilden $P_1 = P \cap H^{\leq}$ und $P_2 = P \cap H^{\geq}$ eine Unterteilung (genannt **Split**) von P ohne neue Ecken.

- i) Zeigen Sie, dass ein Split eine reguläre Unterteilung ist.
- ii) Überlegen Sie sich ein Kriterium wann zwei Splits H und H' kombiniert werden können.
- iii) Zeigen Sie das jede Unterteilung eines Polygons ohne neue Ecken regulär ist.

(10 Punkte)