GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Aenne Benjes
Sebastian Manecke

Diskrete Konvexgeometrie

http://tinygu.de/DKG19

2. Übungsblatt — Abgabe 22. Mai 2019

Wenn Sie bei einer Aufgabe stecken bleiben, dann fragen Sie uns! Wir lieben es, Hinweise zu geben.

Aufgabe 1. Eine **achsen-parallele Box** ist ein Polytop $B \subseteq \mathbb{R}^d$ der Form

$$B \;=\; \{x \in \mathbb{R}^d : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für alle } i = 1, \dots, d\}$$

für $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Bezeiche mit $\mathcal{B}^d$ die Menge aller achsen-parallelen Boxen im $\mathbb{R}^d$.

i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}^d$ eine Schnittfamilie ist.

ii) Zeigen Sie, das jede Bewertung $\phi : \mathcal{B}^d \to \mathbb{R}$ die Erweiterungseigenschaft besitzt[1]

Für $B \in \mathcal{B}^d$ wie oben definiere $\phi(B) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d)$ und $\phi(\varnothing) := 0$.

iii) Zeigen Sie, dass ϕ eine translations-invariante, einfache und monotone Bewertung auf $\mathcal{B}^d$ ist mit $\phi([0,1]^d) = 1$ und folgern Sie, dass $V(B) = \phi(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}^d$.

iv) Zeigen Sie, dass $V(\lambda P) = \lambda^d V(P)$ für alle $\lambda \geq 0$.
Hinweis: Man überlege sich, dass P beliebig genau durch Vereinigungen von Boxen approximiert werden kann.

(20 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat der Kantenlänge 1.

i) Zeigen Sie, dass es eine Zerlegung $R = R_1 \cup \cdots \cup R_m$ gibt, so dass Translationen (keine Drehungen!) der $R_1, \dots, R_m$ eine Zerlegung des achsen-parallelen Quadrats $[0,1]^2$ ergibt.
Hinweis: Denken Sie an Scherungen und zeigen Sie zuerst, dass Sie R in ein Parallelogramm mit einer achsen-parallelen Kante überführen können.

ii) Zeigen Sie die entsprechende Aussage für einen 3-dimensionalen Würfel $Q \subset \mathbb{R}^3$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die baryzentrische Unterteilung eines Polytops tatsächlich eine Zerlegung in Simplexe ist.
Hinweis: Für Punkte $p \in P$ betrachten Sie den Strahl $\{(1-\lambda)b_P + \lambda p : \lambda \geq 0\}$.

(10 Punkte)

[1] Sie können nicht die Aussage über allgemeine Polytope benutzen, da es nicht klar ist ob ϕ auf $\mathcal{P}^d$ fortgesetzt werden kann.

Aufgabe 4. Sei $S = \operatorname{conv}(v_0, \ldots, v_d) \subset \mathbb{R}^d$ ein Simplex.

i) Zeigen Sie, dass für das in der Vorlesung definierte Volumen $V(S)$ gilt

$$V(S) \;=\; \frac{1}{d!}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_0 & v_1 & \cdots & v_d \end{pmatrix}\right| .$$

ii) Definiere

$$D \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{01} & \cdots & \ell_{0d} \\ 1 & \ell_{10} & 0 & \cdots & \ell_{1d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ell_{d0} & \ell_{d-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\ell_{ij} = \|v_i - v_j\|^2$. Zeigen Sie, dass $\det(D) = 2^d (d!)^2 (-1)^{d-1} V(S)^2$.

(10 Punkte)