

Diskrete Konvexgeometrie

<http://tinygu.de/DKG19>

1. Übungsblatt — Abgabe 30. April 2019

Wenn Sie bei einer Aufgabe stecken bleiben, dann fragen Sie uns! Wir lieben es, Hinweise zu geben.

Aufgabe 1. Sei $P = \text{conv}(V)$ ein d -dimensionales Polytop und $q \in \text{relint}(P)$. Zeigen Sie, dass es $U \subseteq V$ gibt mit $|U| \leq 2d$ so dass $Q = \text{conv}(U)$ d -dimensional ist und $q \in \text{relint}(Q)$. **Hinweis:** Betrachten Sie geschickt gewählte Geraden durch den Punkt q .

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stückweise linear** falls es d -dimensionale konvexe Kegel $C_1, \dots, C_m$ und lineare Funktionen $\ell_1(x), \dots, \ell_m(x)$ gibt, so dass

- $\mathbb{R}^d = C_1 \cup \dots \cup C_m$,
- $\text{relint}(C_i) \cap \text{relint}(C_j) = \emptyset$ für $i \neq j$ und
- $f(x) = \ell_i(x)$ für alle $i = 1, \dots, m$ und alle $x \in C_i$.

i) Sei $P \subset \mathbb{R}^d$ ein nicht-leeres Polytop und $h_P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ seine Stützfunktion. Zeigen Sie, dass h_P eine stückweise lineare Funktion ist.

ii) Ein **Zonotop** ist ein Polytop $Z \subset \mathbb{R}^d$ der Form

$$Z = \sum_{i=1}^r [-z_i, z_i]$$

für $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{R}^d$. Geben Sie eine explizite und einfache Darstellung von h_Z an.

iii) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stückweise lineare Funktion. Zeigen Sie, dass es Polytope $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ gibt mit $f = h_P - h_Q$. **Hinweis:** Sie können annehmen dass $Q = \mu Z$ wobei Z ein Zonotop ist und $\mu \gg 0$. Die zugehörigen Vektoren z_i bekommen Sie aus den definierenden Ungleichungen der $C_1, \dots, C_m$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei K ein konvexer Körper und $\varepsilon > 0$.

i) Seien $x_1, \dots, x_N \in K$. Zeigen Sie, dass

$$\text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^N x_i + \varepsilon B_d \right) = \text{conv}(x_1, \dots, x_N) + \varepsilon B_d.$$

ii) Seien $x_1, \dots, x_N \in \partial K$ so, dass $\partial K \subseteq \bigcup_i x_i + \varepsilon B_d$. Beweisen Sie, dass für $P = \text{conv}(x_1, \dots, x_N)$ gilt $\text{dist}(P, K) \leq \varepsilon$.

(10 Punkte)