

Algebraische und geometrische Kombinatorik

<http://tinygu.de/AGK19>

11. Übungsblatt — Abgabe 9. Juli 2019

Aufgabe 1. Es seien $A = \mathbb{k}[x, y, z]/I$ und $B = \mathbb{k}[w, x, y, z]/J$ standard graduierte Algebren mit $I = \langle xy, xz^2, z^3 \rangle$ und $J = \langle xz, xw, yz, yw \rangle$.

- Finden Sie ein System von Parametern für A und B .
- Bestimmen Sie die Hilbert-Reihen von A und B .
- Sind A, B Cohen-Macaulay?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Für $d \geq 1$ sei $I_M = \langle x_i x_{d+i} : i \in [d] \rangle$ und $S = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_{2d}]/I_M$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass $\theta_i := x_i - x_{d+i}$ für $i = 1, \dots, d$ ein lineares System von Parametern für S ist.
- Zeigen Sie, dass die θ_i eine reguläre Sequenz bilden. Schlussfolgern Sie (mal wieder) die Nichtnegativität der Binomialkoeffizienten daraus.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei Γ ein Simplicialkomplex und $I_\Gamma = \langle x^\sigma : \sigma \text{ minimale Nichtseite} \rangle$ wie üblich das Stanley-Reisner Ideal. Sei für $F \in \Gamma$ eine Facette $I_F := \langle x_i : i \notin F \rangle$. Zeigen Sie, dass

$$I_\Gamma = \bigcap_{F \text{ Facette}} I_F.$$

(10 Punkte)

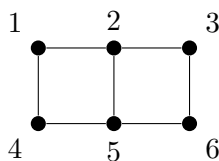
Aufgabe 4. Sei $S := \mathbb{k}[x, y, z]$ und $\theta_1 := xy$, $\theta_2 := xz$ und $\theta_3 := y - 1$. Finden Sie je eine Reihenfolge, in der diese θ_i 's eine bzw. keine reguläre Sequenz bilden.

(10 Punkte)

Bonus 5. Sei $\Gamma = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph auf der Knotenmenge $A \uplus B = [n]$ und sei $A = \mathbb{k}[\Gamma]$ der zugehörige Stanley-Reisner Ring (für Γ gesehen als 1-dimensionaler Simplicialkomplex).

- Zeigen Sie, dass $\theta_1 := \sum_{i \in A} x_i$ und $\theta_2 := \sum_{i \in B} x_i$ ein lineares System von Parametern für A ist.

Sei Γ wie folgt gegeben:



Dann ist A ein endlich erzeugter Modul über $B = \mathbb{k}[\theta_1, \theta_2]$ mit Erzeugern $\eta_1 = 1, \eta_2 = x_2, \eta_3 = x_3, \eta_4 = x_5, \eta_5 = x_6, \eta_6 = x_4 x_5$ und $\eta_7 = x_5 x_6$.

- Schreiben Sie die Elemente x_2^3, x_1^3 und $x_4^2 x_5$ als Linearkombinationen der $\eta_1, \dots, \eta_7$ mit Koeffizienten in B .

(+10 Punkte)