

Algebraische und geometrische Kombinatorik

<http://tinygu.de/AGK19>

10. Übungsblatt — Abgabe 2. Juli 2019

Aufgabe 1. Es seien $A = \mathbb{k}[x, y, z]/I$ und $B = \mathbb{k}[w, x, y, z]/J$ standard graduierte Algebren mit $I = \langle xy, xz^2, z^3 \rangle$ und $J = \langle xz, xw, yz, yw \rangle$.

- i) Finden Sie ein System von Parametern für A und B .
- ii) Bestimmen Sie die Hilbert-Reihen von A und B .
- iii) Sind A, B Cohen-Macaulay?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Eine Funktion $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{k}$ ist ein **Quasipolynom vom Grad d** wenn Polynome $f_0, \dots, f_{q-1}$ existieren, so dass $f(n) = f_r(n)$ für $n \equiv r \pmod{q}$ und $d = \max(\deg f_i : i = 0, \dots, q-1)$.

Zeigen Sie, dass f ein Quasipolynom vom Grad d ist genau dann, wenn es $a_1, \dots, a_{d+1} \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt so dass

$$\sum_{n \geq 0} f(n)t^n = \frac{h(t)}{(1-t^{a_1}) \cdots (1-t^{a_{d+1}})}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei A eine endlich erzeugte $\mathbb{k}$ -Algebra.

- i) Zeigen Sie für $f_1, \dots, f_m \in A$ und $n_i > 0$, dass die Algebra $\mathbb{k}[f_1, \dots, f_m]$ ein endlich erzeugter Modul über der Algebra $\mathbb{k}[f_1^{n_1}, \dots, f_m^{n_m}]$ ist.

Sei $\theta_1, \dots, \theta_m$ ein System von Parametern von A .

- ii) Zeigen Sie, dass $\theta_1^{n_1}, \dots, \theta_m^{n_m}$ ein System von Parametern von A ist.

(10 Punkte)