GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Algebraische und geometrische Kombinatorik

http://tinygu.de/AGK19

9. Übungsblatt — Abgabe 25. Juni 2019

Aufgabe 1. Sei $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ der fein-graduierte Polynomring. Für $\mathbf{z}^{\beta_1}, \dots, \mathbf{z}^{\beta_m}$ sei das **kleinste gemeinsame Vielfache**[1] $\operatorname{kgV}(\mathbf{z}^{\beta_1}, \dots, \mathbf{z}^{\beta_m})$. Zeigen Sie, dass für ein Monomideal $I = \langle \mathbf{x}^{\alpha_1}, \dots, \mathbf{x}^{\alpha_m} \rangle$ gilt

$$F(I, \mathbf{z}) \;=\; \sum_{\varnothing \neq S \subseteq [m]} (-1)^{|S|-1} \frac{\operatorname{kgV}(\mathbf{z}^{\alpha_i} : i \in S)}{(1 - z_1) \cdots (1 - z_n)}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Für $d \geq 1$ sei $M \subseteq [2d]$ die Menge der Paare $\{i, d+i\}$ für $i = 1, \dots, d$.

i) Bestimmen Sie den Simplizialkomplex Γ der M als minimale Nichtseiten hat. Was ist die Dimension?

Bestimmen Sie die Hilbertreihe von $\Bbbk[\Gamma]$ für...

ii) ...die Graduierung $\deg x_i = \deg x_{d+i} = e_i \in \mathbb{Z}^d$.

iii) ...die Graduierung $\deg x_i = 1 \in \mathbb{Z}$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\Gamma \subseteq 2^{[n]}$ ein $(d-1)$-dimensionaler Simplizialkomplex. Das **K-Polynom** von Γ ist der Zähler der fein-graduierten Hilbertreihe

$$K(\Gamma, z_1, \dots, z_n) \;\coloneqq\; \sum_{\sigma \in \Gamma} \prod_{i \in \sigma} z_i \prod_{i \notin \sigma} (1 - z_i) \;=\; \sum_{\rho \subseteq [n]} c_\rho \mathbf{z}^\rho$$

i) Zeigen Sie, dass $c_\rho = \widetilde{\chi}(\Gamma|_\rho)$ wobei $\Gamma|_\rho \coloneqq \{\sigma \in \Gamma : \sigma \subseteq \rho\}$ die **Einschränkung** von Γ auf ρ ist. Insbesondere ist $c_\rho = 0$ falls $\rho \in \Gamma$.

Wir schreiben $\overline{\tau}$ für $[n] \setminus \tau$. Der **Alexander-duale** Komplex von Γ ist $\Gamma^* \coloneqq \{\overline{\sigma} : \sigma \notin \Gamma\}$.

ii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{lk}(\overline{\sigma}, \Delta^*) = (\Gamma|_\sigma)^*$ für alle $\sigma \subseteq [n]$. Folgern Sie, dass $c_\rho = (-1)^n \widetilde{\chi}(\operatorname{lk}(\overline{\rho}, \Delta^*))$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $(\widehat{P} \preceq)$ ein graduiertes Poset mit $\widehat{0}$ und $\widehat{1}$ vom Rang $r+1$ und Rangfunktion $\rho : \widehat{P} \to \{0, \dots, r+1\}$. Bezeichne weiter $(\beta(S))_{S \subseteq [r]}$. den Fahnen-h-Vektor von $\widehat{P}$.

i) Zeigen Sie, das in der Graduierung $\deg x_a = e_{\rho(a)} \in \mathbb{Z}^r$ für die $\mathbb{Z}^r$-graduierte Hilbertreihe gilt

$$(1 - w_1) \cdots (1 - w_r) F(\Bbbk[P], w_1, \dots, w_r) \;=\; \sum_{S \subseteq [r]} \beta(S) \mathbf{w}^S$$

ii) Zeigen Sie, dass wenn $(\widehat{P}, \preceq)$ Eulersch ist, dann gilt $\beta(S) = \beta([r] \setminus S)$ für alle $S \subseteq [d]$.

(10 Punkte)

---

[1] Also das Monom $\mathbf{z}^\gamma$ mit $\gamma_j = \max((\beta_i)_j : j = 1, ..., m)$.