GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Algebraische und geometrische Kombinatorik

http://tinygu.de/AGK19

8. Übungsblatt — Abgabe 18. Juni 2019

Aufgabe 1. i) Sei A eine $\Bbbk$-Algebra und sei eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln gegeben:

$$0 \to K \to M \to L \to 0$$

Zeigen Sie, dass K, L genau dann noethersch sind, wenn es M ist.

ii) Zeigen Sie, wenn A eine noetherisch Algebra ist, dann ist A^r ein noetherscher A-Modul für alle $r \geq 1$.
Hinweis: Verwenden Sie die Projektion $A^r \to A^{r-1}$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $A = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ ein $\mathbb{Z}^r$-graduierter Polynomring mit $\deg x_i = \delta_i \in \mathbb{Z}^r$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^r$ ist A_α ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum.

ii) Für ein $\beta \in \mathbb{Z}^r$ ist A_β ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum.

iii) A_0 ist ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum.

iv) A_0 ist isomorph zu $\Bbbk$.

v) Die Graduierung ist positiv: es gibt $w \in \mathbb{Z}^r$ mit $w^t \delta_i > 0$ für alle i.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $A = \Bbbk[w, x, y, z]/I$ für $I = \langle w^3yz^2, wx^2y^2, xz \rangle$. Bestimmen Sie die multigraduierte Hilbertreihe für die folgenden Graduierungen

i) $G = \mathbb{Z}^4$ mit

$$\deg w = (1,0,0,0), \ \deg x = (0,1,0,0), \ \deg y = (0,0,1,0), \ \deg z = (0,0,0,1).$$

ii) $G = \mathbb{Z}^2$ mit

$$\deg w = (1,0), \ \deg x = (0,-1), \ \deg y = (2,0), \ \deg z = (1,2).$$

iii) $G = \mathbb{Z}$ mit

$$\deg w = 1, \ \deg x = 1, \ \deg y = 2, \ \deg z = 3.$$

(10 Punkte)