GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Algebraische und geometrische Kombinatorik

http://tinygu.de/AGK19

7. Übungsblatt — Abgabe 11. Juni 2019

Aufgabe 1. Sei $(L, \preceq)$ ein Verband. Sei $A := \mathbb{K}L$ der Vektorraum mit Basis f_a für $a \in L$. Wir definieren eine Multiplikation auf den Basiselementen $f_a \cdot f_b := f_{a \wedge b}$ und setzen sie auf A durch Linearität zu einer bilinearen Abbildung fort.

i) Zeigen Sie, dass A eine unitäre und kommutative Algebra ist.

Sei $B := \mathbb{K}^L$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basiselementen e_a für $a \in L$ und der Multiplikation

$$e_a \cdot e_b := \begin{cases} e_a & \text{falls } a = b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii) Zeigen Sie, dass $\varphi : A \to B$ die lineare Abbildung die auf Basiselementen definiert ist durch $\varphi(f_b) = \sum_{a \preceq b} e_a$ ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren ist. Geben Sie φ^{-1} an.

iii) Hat A nilpotente Elemente? Bestimmen Sie auch die Nullteiler von A.

iv) Zeigen Sie, dass für $a \neq \hat{1}$ gilt:

$$\sum_{t\,:\,t \wedge a = \hat{0}} \mu(t, \hat{1}) \;=\; 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie $\varphi^{-1}(e_{\hat{1}})$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei A eine $\mathbb{K}$-Algebra.

i) Zeigen Sie, dass die Menge aller nilpotenten Elemente ein Ideal bildet.

ii) Ein Ideal $M \neq A$ ist **maximal**, falls es kein Ideal $M \subsetneq M' \subsetneq A$ gibt. Zeigen Sie, dass dann A/M ein Körper ist.

iii) Zeigen Sie, dass für zwei maximale Ideale M, M' gilt $M \cap M' = M + M'$.

iv) Nehmen Sie an, dass für alle $x \in A$ ein $n > 1$ mit $x^n = x$ existiert. Zeigen Sie, dass in A jedes Primideal maximal ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $C := \operatorname{cone}(a_1, \dots, a_n) \subset \mathbb{R}^d$ ein endlich-erzeugter Kegel mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^d$. Die Menge $S = C \cap \mathbb{Z}^d$ bildet ein Monoid mit der aus $\mathbb{Z}^d$ übernommenen Addition. Sei $A = \mathbb{K}C$ die Halbgruppenalgebra mit Basis t^m für $m \in S$.

i) Zeigen Sie, dass A genau dann nullteilerfrei ist, wenn C spitz ist.

ii) Sei F eine Seite von C. Zeigen Sie, dass der Untervektorraum

$$P := \operatorname{span}\{t^m : m \in S \setminus F\}$$

ein Primideal in A ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Für eine noetherische $\mathbb{K}$-Algebra A sei

$$A[\![z]\!] \;=\; \left\{ F = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i : a_i \in A \right\}$$

die $\mathbb{K}$-Algebra der formalen Potenzreihen mit der wohlbekannten Multiplikation.

i) Sei $I \subseteq \mathbb{K}[\![z]\!]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass $\{a_{\mathrm{ord}(F)} : F \in I\}$ ein Ideal in A ist.

ii) Zeigen Sie, dass $A[\![z]\!]$ noethersch ist.
Hinweis: Das Argument für den Hilbert'schen Basissatz lässt sich anpassen um Potenzreihen $F_1, \ldots, F_m \in I$ zu finden, so dass für jedes $F \in I$ explizit $h_1, \ldots, h_m \in A[\![z]\!]$ konstruiert werden können mit $F = \sum_i h_i F_i$.

(10 Punkte)