GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

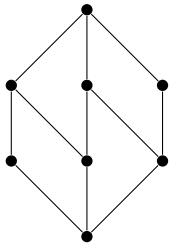
SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Algebraische und geometrische Kombinatorik

http://tinygu.de/AGK19

5. Übungsblatt — Abgabe 28. Mai 2019

Aufgabe 1. Sei das Poset P durch das folgende Hasse-Diagramm gegeben:



i) Bestimmen Sie den Fahnen-f-Vektor α und den Fahnen-h-Vektor β von P.

ii) Finden Sie eine R-Beschriftung.

iii) Bestimmen Sie $\lambda(C)$ für alle maximalen Ketten C und markieren Sie die Abstiege (Descents).

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei Γ ein Simplizialkomplex und $P = \Gamma \cup \{\widehat{1}\}$. Seien $a, b \in P$ mit $a \prec b$.

i) Sei $b \neq \widehat{1}$. Zeigen Sie, dass $[a,b]_P$ isomorph zum Bool'schen Verband $B_{\ell(a,b)}$ ist.

ii) Sei $b = \widehat{1}$ und $a = \sigma \in \Gamma$. Zeigen Sie, dass $[a,b]_P$ isomorph zu $\mathrm{lk}(\sigma, \Gamma) \cup \{\widehat{1}\}$ ist.

iii) Sei Γ eine (Homologie-)Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass

$$\mu_P(a,b) \;=\; \begin{cases} (-1)^{\ell_P(a,b)} & \text{falls } (a,b) \neq (\widehat{0},\widehat{1}), \\ \widetilde{\chi}(\Gamma) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\Delta_{\Sigma \cup \widehat{1}}(\widehat{0},\widehat{1})$ homöomorph zu Σ ist für jeden Simplizialkomplex Σ.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Seien $f, F : 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ mit $F(J) = \sum_{I \subseteq J} f(I)$. Definiere das Polynom $P_F(x_1, \ldots, x_n)$ durch

$$P_F(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{S \subseteq [n]} F(S) \mathbf{x}^{\bar{S}}$$

wobei $\mathbf{x}^S := \prod_{i \in S} x_i$ und $\overline{S} = [n] \setminus S$. Wir definieren P_f entsprechend.

i) Zeigen Sie, dass $P_f(x_1, \ldots, x_n) = P_F(x_1 - 1, \ldots, x_n - 1)$.

ii) Sei P ein graduiertes Poset und $\Gamma = \Delta(P)$. Folgern Sie aus i), dass

$$h_i(\Gamma) \;=\; \sum_{S:\ |S|=i} \beta_P(S)$$

gilt für alle i.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Sei $(P, \preceq)$ ein Poset mit $P = \{1, 2, \ldots, r\}$, so dass aus $i \prec j$ folgt $i < j$ für alle $i, j \in P$. Es gilt also, dass $\ell_0(i) = i$ eine lineare Erweiterung von P ist.

i) Für eine lineare Erweiterung $\ell : P \to [r]$ definiere $I_j := \{a \in P : \ell(a) \leq j\}$ für $j = 0, 1, \ldots, r$. Zeigen Sie, dass $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_r$ eine maximale Kette im Birkhoff-Verband $J(P)$ ist.

ii) Zeigen Sie, dass jede maximale Kette in $J(P)$ von der Form i) ist (also die maximalen Ketten mit $\mathrm{Lin}(P)$ in Bijektion stehen).

iii) Für jede lineare Erweiterung ℓ ist $\pi_\ell = (\ell^{-1}(1), \ell^{-1}(2), \ldots, \ell^{-1}(r))$ eine Permutation. Zeigen Sie, dass $\alpha_{J(P)}(S)$ genau die Anzahl linearen Erweiterungen mit Abstiegen $D(\pi_\ell) \subseteq S$ ist für $S \subseteq [r-1]$.
Hinweis: Finden Sie für jede Kette in $J(P)$ eine geschickte Erweiterung zu einer maximalen Kette.

(10 Punkte)

Birkhoff-Verband eines Posets $(P, \preceq)$.
Ein $I \subseteq P$ heißt **Ordnungsideal**, wenn für alle $b \in I$ und $a \preceq b$ folgt, dass $a \in I$. Zum Beispiel sind Simplizialkomplexe $\Gamma \subseteq 2^V$ Ordnungsideale von $(2^E, \preceq)$. Der **Birkhoff-Verband** von P ist die Menge $J(P) = \{I \subseteq P \text{ Ordnungsideal}\}$ zusammen mit $\subseteq$ als partieller Ordnung.