SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Algebraische und geometrische Kombinatorik

http://tinygu.de/AGK19

4. Übungsblatt — Abgabe 21. Mai 2019

Aufgabe 1. Sei $M = (E, \mathcal{B})$ ein Matroid und $e \in E$ ein Element, dass in mindestens einer Basis B auftritt[1].

i) Die **Löschung** und die **Kontraktion** von e sind $M\backslash e = (E\backslash e, \mathcal{B}')$ und $M/e = (E\backslash e, \mathcal{B}'')$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &:= \{B \in \mathcal{B} : e \notin B\}, \\ \mathcal{B}'' &:= \{B\backslash e : B \in \mathcal{B}, e \in B\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $M\backslash e$ und M/e Matroide sind.

ii) Sei $\mathcal{B}^* := \{E\backslash B : B \in \mathcal{B}\}$. Zeigen Sie, das $M^* = (E, \mathcal{B}^*)$ ein Matroid ist, genannt das **duale Matroid** zu M. Zeigen Sie auch, dass $(M\backslash e)^* = M^*/e$ gilt.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Sei Γ ein Simplizialkomplex. Für eine Ecke $v \in V(\Gamma)$ ist der **Anti-Stern** der Komplex $\operatorname{ast}(v, \Gamma) := \{\sigma \in \Gamma : v \notin \sigma\}$. Ein reiner Komplex Γ heißt **Ecken-zerlegbar**, falls Γ ein Simplex ist oder es eine Ecke $v \in V(\Gamma)$ gibt, so dass der Link $\operatorname{lk}(v, \Gamma)$ und der Anti-Stern $\operatorname{ast}(v, \Gamma)$ Ecken-zerlegbar sind.

i) Zeigen Sie, dass Ecken-zerlegbare Komplexe schälbar sind.
Hinweis: Aufgabe 2i) auf Blatt 3 hilft.

ii) Seien $\mathcal{I}$ die unabhängigen Mengen eines Matroids. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ Ecken-zerlegbar ist.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $(P, \preceq_P)$, $(Q, \preceq_Q)$ zwei Posets. Wir können $P \times Q$ wieder als ein Poset auffassen mit der Ordnung

$$(a, b) \preceq_{P\times Q} (a', b') :\Longleftrightarrow a \preceq_P a' \text{ und } b \preceq_Q b'.$$

i) Zeigen Sie, dass $D_n = \{a \in \mathbb{Z}_{>0} : a|n\}$ mit Teilbarkeit als Halbordnung isomorph zu einem Produkt von Ketten ist.

ii) Zeigen Sie, dass $\mu_{P\times Q}((a, b), (a', b')) = \mu_P(a, a') \cdot \mu_Q(b, b')$.

iii) Zeigen Sie, dass

$$\mu_{D_n}(a, b) = \begin{cases} (-1)^t, & \frac{b}{a} \text{ ist Produkt von } t \text{ verschiedenen Primzahlen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(10 Punkte)

[1] Durch die Graphentheorie inspiriert, heißen Elemente, die in keiner Basis auftreten, **Schleifen**.

Aufgabe 4. Sei $(P, \preceq)$ ein endliches Poset mit Minimum $\hat{0}_P$ und Maximum $\hat{1}_P$.

i) Zeigen Sie, dass $Z(P, -n) = \mu_P^n(\hat{0}_P, \hat{1}_P)$ für alle $n \geq 1$.

Die Menge aller nicht-leeren Intervalle $\mathrm{Int}(P) := \{[a, b] : a \preceq b, a, b \in P\}$ ist partiell geordnet durch Inklusion.

ii) Wie kann man das Zeta-Polynom von $(\mathrm{Int}(P), \subseteq)$ aus dem Zeta-Polynom von $(P, \preceq)$ gewinnen?

iii) Sei $Q = \mathrm{Int}(P) \cup \{\varnothing\}$. Dann ist $(Q, \subseteq)$ ein Poset mit $\hat{0}_Q = \varnothing$ und $\hat{1}_Q = [\hat{0}_P, \hat{1}_P] = P$. Wie verhalten sich $\mu_Q(\hat{0}_Q, \hat{1}_Q)$ und $\mu_P(\hat{0}_P, \hat{1}_P)$ zueinander?

(10 Punkte)

Bonus 5. Charakterisieren Sie alle Graphen (also 1-dim. Simplizialkomplexe), welche die unabhängigen Mengen von Matroiden sind.

(5 Punkte)