Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Algebraische und geometrische Kombinatorik

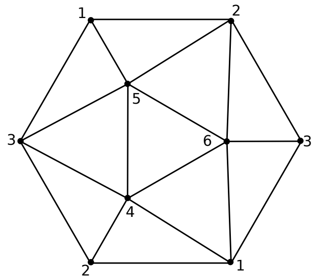
`http://tinygu.de/AGK19`

3. Übungsblatt — Abgabe 14. Mai 2019

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Für einen Simplizialkomplex Γ ist die Randabbildung $\partial_k : C_k(\Gamma, \mathbb{F}_2) \to C_{k-1}(\Gamma, \mathbb{F}_2)$ dann gegeben durch

$$\partial_k([\tau]) \;=\; \sum_{e \in \tau} [\tau \setminus e]\,.$$

Betrachten Sie den folgenden 2-dimensionalen Simplizialkomplex Γ (alle eingezeichneten Dreiecke sind auch Simplizes):



i) Finden Sie eine Basis für $\ker \partial_2$.
ii) Zeigen Sie, dass $\widetilde{H}_1(\Gamma; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$.
iii) Bestimmen Sie den h-Vektor von Γ.
iv) Ist Γ schälbar?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. i) Zeigen Sie, dass ein reiner Simplizialkomplex Γ genau dann schälbar ist, wenn der Kegel $v * \Gamma$ schälbar ist.

Sei Γ im Weiteren ein schälbarer $(d-1)$-dimensionaler Simplizialkomplex.

ii) Zeigen Sie, dass Γ stark zusammenhängend ist.
iii) Zeigen Sie, dass für alle $\sigma \in \Gamma$ der Link $\mathrm{lk}(\sigma, \Gamma)$ schälbar ist.
iv) **Bonus:** Zeigen Sie, dass $h_d(\Gamma) = 1$ gilt, wenn Γ eine Pseudomannigfaltigkeit ist. (Dann hat Γ die Homologie einer Sphäre.)

(10+5 Punkte)

Aufgabe 3. Sei $\Gamma \subseteq 2^E$ ein Simplizialkomplex und $A \subseteq E$. Die **Einschränkung** von Γ auf A ist der Simplizialkomplex

$$\Gamma_A \;:=\; \{\sigma \in \Gamma : \sigma \subseteq A\}\,.$$

Zeigen Sie, dass genau dann Γ die unabhängigen Mengen eines Matroids sind, wenn Γ_A ein reiner Simplizialkomplex für alle $A \subseteq E$ ist.

(10 Punkte)