GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

WiSe 2018/19
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Diskrete und Konvexe Geometrie

`http://tinygu.de/DKG18`

2. Übungsblatt — Abgabe 7. Mai 2019

Aufgabe 1. Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph (also $A \subseteq V \times V$) und $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine **Zirkulation** auf D ist eine Abbildung $f : A \to \mathbb{K}$ so dass

$$\sum_{u \in V, (u,v) \in A} f(u, v) \;=\; \sum_{u \in V, (v,u) \in A} f(v, u)$$

für alle $v \in V$. Sei $\operatorname{Circ}(D) \subseteq \mathbb{K}^V$ der Vektorraum der Zirkulationen auf D.

i) Sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph und $D = (V, A)$ eine Orientierung von G. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Circ}(D) \cong \widetilde{H}_1(G; \mathbb{K})$.

ii) **Bonus:** Sei G zusammenhängend mit n Ecken und m Kanten. Zeigen Sie, dass $\dim \widetilde{H}_1(G; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{m-n+1}$.
Hinweis: Wählen Sie einen aufspannenden Baum T und betrachten Sie die Kanten *nicht* in T.

(10 Punkte)

Aufgabe 2. i) Seien Γ_1, Γ_2 zusammenhängende Simplizialkomplexe mit $V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2) = \{v\}$. Das **Wedge-Produkt** von Γ_1 und Γ_2 ist definiert als $\Gamma_1 \vee \Gamma_2 := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Bestimmen Sie $\widetilde{H}_k(\Gamma_1 \vee \Gamma_2)$ in Abhängigkeit von $\widetilde{H}_k(\Gamma_1)$ und $\widetilde{H}_k(\Gamma_1)$ für alle k.

ii) Sei $\mathcal{T}$ ein geometrischer Simplizialkomplex in der Ebene und $\Gamma = \Gamma(\mathcal{T})$. Bestimmen Sie $\widetilde{\beta}_k(\Gamma) = \dim_{\mathbb{K}} \widetilde{H}_k(\Gamma)$ für $k = 0, 1, 2$.
Hinweis: Argumentieren Sie zuerst, dass $\widetilde{H}_2(\Gamma) = 0$ und benutzen Sie dann die Euler-Charakteristik.

(10 Punkte)

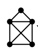
Aufgabe 3. Sei $0 \to A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

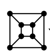
i) Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $C \xrightarrow{\overline{\varphi}} B$ gibt, so dass $\varphi(\overline{\varphi}(c)) = c$ für alle $c \in C$.

ii) Zeigen Sie, dass $B \cong A \oplus C$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie das Element $b - \overline{\varphi}(\varphi(b)) \in \ker \varphi$.

(10 Punkte)

Aufgabe 4. Benutzen Sie Funktionalität von `SimplicialComplex` in SAGE um die f-Vektoren und Bettizahlen über $\mathbb{Q}$ der folgenden drei Komplexe auszurechnen[1].

i) $\Gamma_{\mathsf{cyc}}(G)$ für G das Haus vom Nikolaus ($G =$ ).

ii) $\Gamma_{\mathsf{stab}}(G')$ für G' der Kantengraph eines Würfels ($G' =$ ).

iii) $\Gamma_{\mathsf{chess}}(5, 5)$, nicht schlagende Türme auf einem 5×5-Schachbrett.

(10 Punkte)

[1] Für die Homologieberechnung benutzen Sie bitte `.homology(base_ring=QQ)`