GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

SoSe 2019
Prof. Dr. Raman Sanyal
Sebastian Manecke

Algebraische und geometrische Kombinatorik

http://tinygu.de/AGK19

1. Übungsblatt — Abgabe 30. April 2019

Wenn Sie bei einer Aufgabe stecken bleiben, dann fragen Sie uns! Wir lieben es, Hinweise zu geben.

Aufgabe 1. Sei $V = \{1 < a < 60 : a \text{ teilt } 60\}$.

$$\Gamma_{\mathsf{div}} \;:=\; \{\{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\} \subseteq V : k \geq 0 \text{ und } a_i \text{ teilt } a_j \text{ für alle } i < j\}.$$

i) Welche Dimension hat Γ_{div}? Ist Γ_{div} rein und zusammenhängend?

ii) Bestimmen Sie den f- und h-Vektor von Γ_{div}.

iii) Finden Sie einen geometrischen Simplizialkomplex $\mathcal{T}$ im $\mathbb{R}^2$ mit $\Gamma(\mathcal{T}) = \Gamma_{\mathsf{div}}$. Ist Γ_{div} partitionierbar?

(10 Punkte)

Aufgabe 2. Vervollständigen Sie die Tabelle auf der Rückseite in Abhängigkeit der gegebenen Graphen, Vektorkonfigurationen, etc.

(10 Punkte)

Aufgabe 3. Für $n \geq 0$ sei wie in der Vorlesung $S = S_0 \oplus S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, so dass $S_i = \mathbb{R}\text{-}\operatorname{span}\{\mathbf{x}^\tau : \tau \subseteq [n], |\tau| = i\}$ und Multiplikation $\mathbf{x}^\tau \cdot \mathbf{x}^\sigma = \mathbf{x}^{\tau \cup \sigma}$ falls $\tau \cap \sigma = \varnothing$ und $= 0$ sonst. Sei $\omega = x_1 + \cdots + x_n \in S_1$.

i) Sei $f(\mathbf{x}) = \sum c_\tau \mathbf{x}^\tau \in S_i$ mit $f \cdot \omega = 0$. Zeigen Sie, dass für alle $\sigma \in \binom{[n]}{i+1}$ gilt, dass $\sum_{j \in \sigma} c_{\sigma \setminus \{j\}} = 0$.

ii) Zeigen Sie, dass für $n > 4$ die linearen Abbildungen $S_1 \xrightarrow{\cdot\omega} S_2$ und $S_2 \xrightarrow{\cdot\omega} S_3$ injektiv sind. **Hinweis:** Für $S_2 \xrightarrow{\cdot\omega} S_3$ reicht es die Gleichungen aus i) für alle $\sigma \subset [5]$ mit $|\sigma| = 3$ zu betrachten.

☆ **Bonus:** Zeigen Sie allgemein, dass $S_i \xrightarrow{\cdot\omega} S_{i+1}$ für alle $i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ injektiv ist.

(10+5 Punkte)

Aufgabe 4. Sei Γ ein 1-dimensionaler Simplizialkomplex (also ein Graph). Bestimmen Sie $\widetilde{H}_0(\Gamma; \mathbb{K})$ und geben Sie eine Basis an.

(10 Punkte)

Sei $G = (V, E)$ zusammenhängender Graph mit $n = |V|$ und $m = |E|$.

$$\Gamma_{\mathsf{cyc}}(G) \;:=\; \{I \subseteq E : (V, I) \text{ kreisfrei}\}.$$
$$\Gamma_{\mathsf{stab}}(G) \;:=\; \{S \subseteq V : S \text{ stabil}\}.$$

Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\Gamma_{\mathsf{vec}}(a_1, ..., a_n) \;:=\; \{\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [n] : a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} \text{ linear unabhängig}\}.$$

Für $m, n > 0$ sei $V = [m] \times [n]$ die Positionen auf einem $m \times n$-Schachbrett.

$$\Gamma_{\mathsf{chess}}(m, n) \;:=\; \{T \subseteq [m] \times [n] : \text{ Türme auf } T \text{ schlagen sich nicht}\}.$$

Für $n \geq 3$, sei V die $\binom{n-1}{2}$ vielen Diagonalen in einem konvexen n-Eck P.

$$\Gamma_{\mathsf{Ass}}(n) \;:=\; \{\{D_1, \ldots, D_k\} \subseteq V : D_i \cap D_j \text{ liegt im Rand von } P \text{ für } i \neq j\}.$$

	Dimension	rein?	zshgd?
$\Gamma_{\mathsf{cyc}}(G)$	$n-2$		
$\Gamma_{\mathsf{stab}}(G)$	$\alpha(G)-1$	nein	
$\Gamma_{\mathsf{vec}}(a_1, ..., a_n)$			
$\Gamma_{\mathsf{chess}}(m, n)$			
$\Gamma_{\mathsf{Ass}}(n)$			

Begründungen:

- Facetten von $\Gamma_{\mathsf{cyc}}(G)$ sind aufspannende Bäume $T \subseteq E$. Jeder aufspannende Baum hat $|V| - 1$ Kanten und somit $\dim T = n - 2$.
- Die Stabilitätszahl eines Graphen ist $\alpha(G) = \max(|S| : S \text{ stabil})$.
- Der Komplex $\Gamma_{\mathsf{stab}}(G)$ für einen Pfad auf 3 Knoten ist nicht rein.
- ...